

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Кафедра высшей математики

**ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ
СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ.**

ЧАСТЬ V.

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

Брест 2012

УДК 517.9 (076.5)

В этой части практикума содержатся краткие теоретические сведения, основные формулы, решения типовых задач по всем темам разделов «Кратные интегралы», «Криволинейные интегралы» учебной программы по математике для технических специальностей, а также задания для аудиторных и домашних работ к каждому практическому занятию по этим темам. Издается в 7 частях. Часть 5.

Составители: Р. А. Гоголинская, ассистент,
В. Т. Джура, ассистент,
Е. В. Кузьмина, старший преподаватель,
И.В. Лизунова, доцент,
Л. Т. Мороз, доцент.

Рецензент: Матысик О.В., заведующий кафедрой алгебры и геометрии
Учреждения образования «Брестский государственный
университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м. н., доцент.

Содержание

Двойной интеграл.....	4
Основные сведения.....	4
Замена переменных в двойном интеграле.	
Переход к полярным координатам.....	13
Приложения двойных интегралов.....	17
Приложения двойных интегралов в механике.....	20
Тройной интеграл.....	24
Основные сведения.....	24
Замена переменных в тройном интеграле. Переход к сферическим и цилиндрическим координатам.....	30
Приложения тройного интеграла.....	35
Криволинейный интеграл I рода. Вычисление.....	40
Криволинейный интеграл II рода. Вычисление.....	45
Приложения криволинейных интегралов.....	50
Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.....	52

Двойной интеграл

Основные сведения

Определение двойного интеграла

На плоскости Oxy рассмотрим некоторую замкнутую область D , ограниченную замкнутой линией L .

Пусть в D задана непрерывная функция $z = f(x, y)$. Произвольными линиями разобьем D на n элементарных областей S_i , площади которых ΔS_i ($i = \overline{1, n}$) (рис. 1).

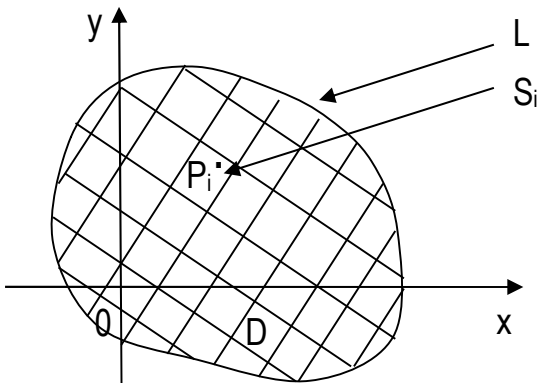


Рисунок 1

В каждой области S_i выберем произвольную точку $P_i(x_i, y_i)$. **Диаметром** d_i области S_i называется длина наибольшей из хорд, соединяющих граничные точки S_i .

Выражение вида:

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i \quad (1)$$

называется **n -й интегральной суммой для функции $z = f(x, y)$ в области D** .

Вследствие произвольного разбиения области D на элементарные области S_i и случайного выбора в них точек P_i можно составить бесчисленное множество указанных сумм. Однако, согласно теореме существования и единственности, если функция $z = f(x, y)$, например, непрерывна в D и линия L – кусочно-гладкая, предел всех этих сумм, найденных при условии $d_i \rightarrow 0$, всегда существует и единственен.

Двойным интегралом функции $z = f(x, y)$ по области D называется $\lim_{d_i \rightarrow 0} I_n$, обозначаемый $\iint_D f(x, y) dS$.

Таким образом, по определению

$$\iint_D f(x, y) dS = \lim_{d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i \quad (2).$$

Здесь и далее будем предполагать, что функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области D и линия L – кусочно-гладкая, поэтому указанный в формуле (2) предел всегда существует.

Свойства двойного интеграла

1. $\iint_D c f(x, y) dS = c \iint_D f(x, y) dS \quad (c = \text{const}).$
2. $\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)] dS = \iint_D f(x, y) dS \pm \iint_D g(x, y) dS.$
3. Если $f(x, y) \leq g(x, y)$, то $\iint_D f(x, y) dS \leq \iint_D g(x, y) dS.$
4. $\left| \iint_D f(x, y) dS \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dS.$
5. $\iint_D f(x, y) dS = \iint_{D'} f(x, y) dS + \iint_{D''} f(x, y) dS$, где D' и D'' – области, на которые разбита область D некоторой кривой.
6. Если в D $m \leq f(x, y) \leq M$, то

$$m S_D \leq \iint_D f(x, y) dS \leq M S_D,$$

откуда $\iint_D f(x, y) dS = \mu S_D \quad (m \leq \mu \leq M)$, S_D – площадь области D .

В прямоугольных декартовых координатах $dS = dxdy$.

Геометрический смысл двойного интеграла

1. Если $f(x, y) > 0$, то двойной интеграл от функции $z = f(x, y)$ по области D равен объему тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, с боков цилиндрической поверхностью с образующими параллельными оси Oz (направляющей служит граница L области D), снизу – плоскостью $z = 0$.

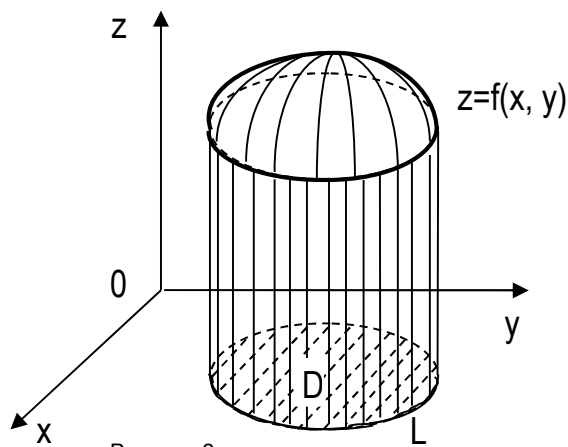


Рисунок 2

2. Площадь S области D может быть найдена по формуле

$$S = \iint_D dxdy.$$

Физический смысл двойного интеграла

Двойной интеграл от функции $z = f(x, y) > 0$ по области D представляет собой массу пластинки D , если плотностью этой пластинки в точке $P(x, y)$ считать функцию $f(x, y)$.

Приведение двойного интеграла к повторному в случае криволинейной области

Различают два основных вида области интегрирования:

1. Область первого вида D' ограниченную слева и справа прямыми

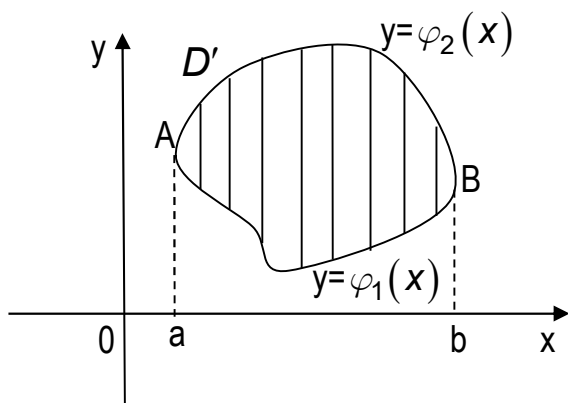


Рисунок 3

$x = a$, $x = b$ ($a < b$) соответственно, снизу – кривой $y = \varphi_1(x)$, сверху – кривой $y = \varphi_2(x)$ [$\varphi_2(x) \geq \varphi_1(x)$], каждая из которых пересекается с вертикалью $x = \alpha$ ($a \leq \alpha \leq b$) только в одной точке (область является правильной относительно оси Oy) (Рис. 3).

2. Область второго вида D'' ограниченную снизу и сверху прямыми

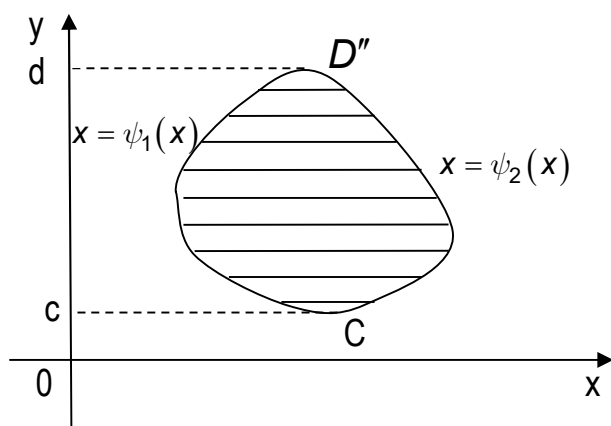


Рисунок 4

$y = c$, $y = d$ соответственно, слева – кривой $x = \psi_1(y)$, справа – кривой $x = \psi_2(y)$ [$\psi_2(y) \geq \psi_1(y)$], каждая из которых пересекается с горизонталью $y = \beta$ ($c \leq \beta \leq d$) только в одной точке (область правильная относительно Ox). (Рис. 4).

Если для функции $f(x, y)$,

определенной в области D' , существует двойной интеграл, то выполняется равенство

$$\iint_{D'} f(x, y) dS = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \quad (1).$$

В случае области второго вида D'' (правильной относительно оси Ox)

$$\iint_{D''} f(x, y) dS = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \quad (2).$$

Если область интегрирования не является целиком правильной ни относительно оси Ox , ни относительно оси Oy , то стараются разбить на части, каждая из которых относится к одной из этих видов (рис. 5 а, б, в).

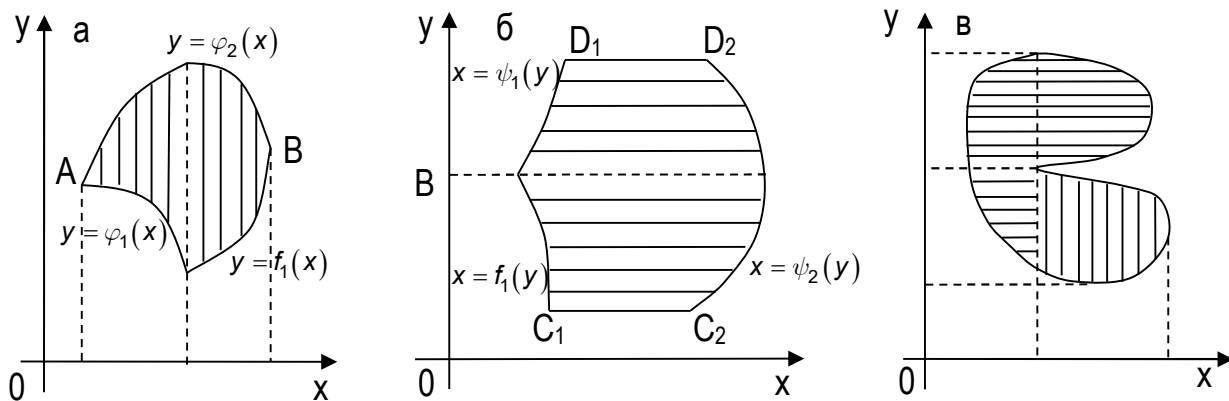


Рисунок 5

В повторном интеграле (1) интегрирование производится сначала по y , при этом x считается постоянным; пределы интегрирования $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ представляет собой правые части уравнений линий $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, ограничивающих область D' снизу и сверху соответственно.

В результате интегрирования получается функция от x , которую потом интегрируют по x в постоянных пределах a и b .

В повторном интеграле (2) интегрирование производится сначала по x от $\psi_1(y)$ до $\psi_2(y)$, при этом y считается постоянным, затем полученную функцию от y интегрируют по y в пределах от c до d .

Замечание 1. В повторном интеграле (1) нижний предел интегрирования по x равен наименьшей абсциссе точки границы области D' (рис. 3), верхний предел b равен наибольшей абсциссе.

Замечание 2. В повторном интеграле (2) постоянные пределы интегрирования c и d являются наименьшей и наибольшей ординатами точек границы области D'' (рис. 4).

Пример 1.

Вычислить $\iint_D xy \, dx \, dy$, где D является прямоугольником с границами $x = 4$, $x = 8$, $y = 1$, $y = 2$.

Решение.

$$\text{По формуле (1) имеем } \iint_D xy \, dx \, dy = \int_4^8 dx \int_1^2 xy \, dy.$$

$$\text{Так как } \int_1^2 xy \, dy = x \frac{y^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{x}{2} (4 - 1) = \frac{3}{2} x,$$

$$\text{то } \int_4^8 dx \int_1^2 xy \, dy = \int_4^8 \frac{3}{2} x \, dx = \frac{3}{2} \int_4^8 x \, dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_4^8 = \frac{3}{4} (64 - 16) = 36.$$

$$\text{Следовательно, } \iint_D xy \, dx \, dy = 36.$$

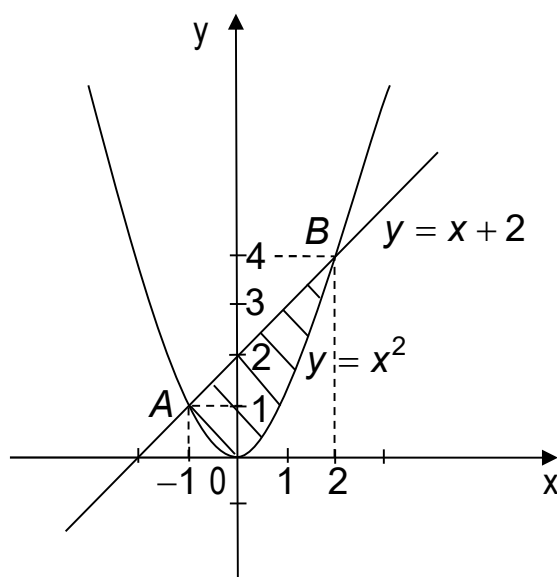
Замечание. Тот же результат можно получить и по формуле (2):

$$\iint_D xy \, dx dy = \int_1^2 dy \int_4^8 xy \, dx. \text{ Действительно, } \int_4^8 xy \, dx = y \frac{x}{2} \Big|_4^8 = y \frac{64-16}{2} = 24y,$$

$$\text{поэтому } \int_1^2 dy \int_4^8 xy \, dx = \int_1^2 24y \, dy = 12y^2 \Big|_1^2 = 12(4-1) = 36.$$

Пример 2.

Вычислить $\iint_D x^3 y \, dx dy$, D ограничено линиями $y = x^2$, $y = x + 2$.



Решение.

Построим область D .

Найдем точки пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = x + 2$:

$$x^2 = x + 2; \quad x^2 - x - 2 = 0; \quad x_1 = -1; \quad x_2 = 2; \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 4.$$

Следовательно, точки пересечения $A(-1; 1)$ и $B(2; 4)$.

Эта область является правильной относительно оси Oy : снизу она ограничена кривой $y = x^2$, сверху — $y = x + 2$, $-1 \leq x \leq 2$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \iint_D x^3 y \, dx dy &= \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} x^3 y \, dy = \int_{-1}^2 dx \frac{x^3 y^2}{2} \Big|_{x^2}^{x+2} = \int_{-1}^2 \frac{x^3}{2} ((x+2)^2 - x^4) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 (x^5 + 4x^4 + 4x^3 - x^7) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^6}{6} + 4 \frac{x^5}{5} + x^4 - \frac{x^8}{8} \right) \Big|_{-1}^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{64}{6} + \frac{4 \cdot 32}{5} + 16 - 32 \right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{5} + 1 - \frac{1}{8} \right) \right) = 10 \frac{1}{80}. \end{aligned}$$

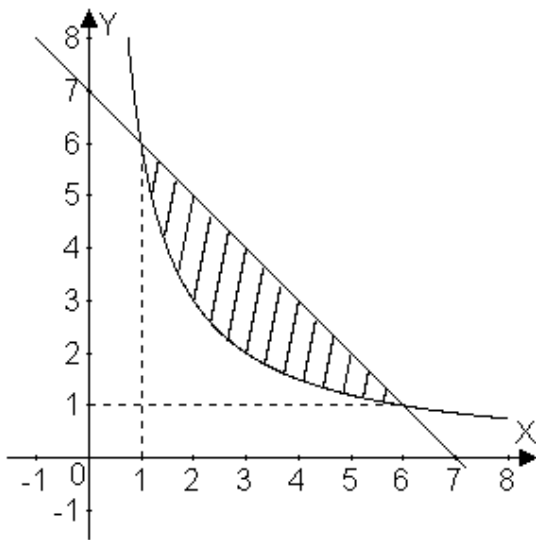
Пример 3.

Вычислить $\iint_D dx dy$, D ограничено линиями $xy = 6$, $x + y = 7$.

Решение.

Найдем точки пересечения гиперболы $xy = 6$ и прямой $x + y = 7$. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 - y \\ (7 - y)y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 - y \\ 7y - y^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 - y \\ y^2 - 7y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1, y_2 = 6 \\ x_1 = 6, x_2 = 1. \end{cases}$$



Следовательно, точки пересечения $A(1;6)$ и $B(6;1)$.

Эту область можно рассматривать как область первого D' и второго D'' вида.

Область D снизу ограничена кривой $y = \frac{6}{x}$ (выражен y из уравнения гиперболы), сверху – отрезком прямой $y = 7 - x$ (y выражен из уравнения прямой), $1 \leq x \leq 6$. Это частный случай области первого вида (рис. 3).

$$\begin{aligned} \iint_D x \, dx \, dy &= \int_1^6 dx \int_{\frac{6}{x}}^{7-x} x \, dy = \int_1^6 dx (xy) \Big|_{\frac{6}{x}}^{7-x} = \int_1^6 \left(x(7-x) - x \cdot \frac{6}{x} \right) dx = \\ &= \int_1^6 (7x - x^2 - 6) dx = \left(7 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 6x \right) \Big|_1^6 = 18 \cdot 7 - \frac{6^3}{3} - 36 - \frac{7}{2} + \frac{1}{3} + 6 = \frac{125}{6}. \end{aligned}$$

Пример 4.

Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

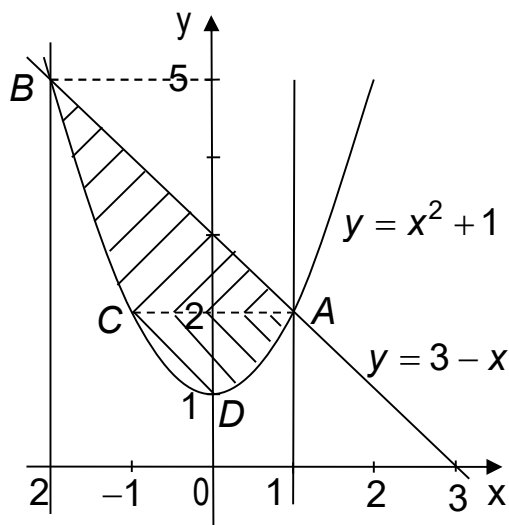
$$\int_{-2}^1 dx \int_{x^2+1}^{3-x} f(x, y) dy.$$

Решение.

Область интегрирования D ограничена линиями:

$$x = 1; \quad y = x^2 + 1.$$

$$x = -2; \quad y = 3 - x.$$



Найдем точки пресечения параболы $y = x^2 + 1$ и прямой $y = 3 - x$.

$$\begin{cases} y = x^2 + 1; \\ y = 3 - x. \end{cases}$$

$$x^2 + 1 = 3 - x$$

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -2$$

$$y_1 = 2, \quad y_2 = 5.$$

Получили $A(1;2)$, $B(-2;5)$.

Область D – область первого вида, к области второго вида она не относится, но ее можно разбить на две области второго вида прямой $y = 2$.

Область второго вида с границей ABC слева ограничена кривой $x = -\sqrt{y-1}$ (x выразим из уравнения $y = x^2 + 1$: $x^2 = y - 1$, $x = \pm\sqrt{y-1}$, для $x < 0$ $x = -\sqrt{y-1}$, для $x \geq 0$ $x = \sqrt{y-1}$) справа – линией $x = 3 - y$ (x выражено из уравнения $y = 3 - x$), снизу – линией $y = 2$. Область с границей ABC – частный случай области второго вида (рис. 4), $2 \leq y \leq 5$.

Область с границей ACD – второго вида, слева она ограничена кривой $x = -\sqrt{y-1}$, справа – кривой $x = \sqrt{y-1}$, сверху – линией $y = 2$, $1 \leq y \leq 2$. Значит, интеграл можно представить в виде суммы двух интегралов:

$$\int_{-2}^1 dx \int_{x^2+1}^{3-x} f(x,y) dy = \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} f(x,y) dx + \int_2^5 dy \int_{-\sqrt{y-1}}^{3-y} f(x,y) dx.$$

Пример 5.

Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y) dy.$$

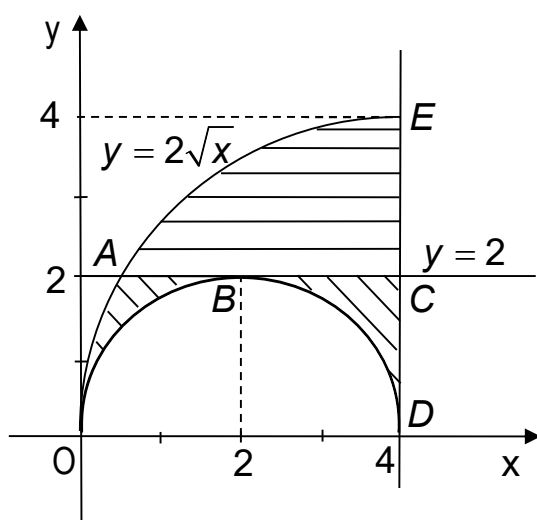
Решение.

Область D интегрирования ограничена линиями:
 $x = 0$; $x = 4$

$$y = \sqrt{4x - x^2}; \quad y = 2\sqrt{x}.$$

$y = \sqrt{4x - x^2}$ – уравнение окружности с центром $(2;0)$ радиуса $r = 2$;
 $y \geq 0$.

$y = 2\sqrt{x}$ – уравнение параболы с вершиной в начале координат, $y \geq 0$.



Рассмотрим область D относительно оси Ox .

Разобьем ее прямой $y = 2$ на три области, правильные относительно Ox .

Область с границей AEC слева ограничена кривой $y = 2\sqrt{x}$, необходимо выразить x : $x = \frac{y^2}{4}$; справа она ограничена линией $x = 4$, снизу – линией $y = 2$, $2 \leq y \leq 4$.

Область ABO слева ограничена кривой $x = \frac{y^2}{4}$, справа – дугой окружности, из

уравнения которой $x - 2 = \pm\sqrt{4 - y^2}$, т.к. для этой области $x < 2$, поэтому $x = 2 - \sqrt{4 - y^2}$. Сверху область ограничена линией $y = 2$, $0 \leq y \leq 2$.

Область с границей BCD справа ограничена линией $x = 4$, слева $x = 2 + \sqrt{4 - y^2}$ (т.к. $x \geq 2$), сверху – линией $y = 2$, $0 \leq y \leq 2$.

Т.о. данный интеграл можно представить как сумму трех интегралов:

$$\int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y) dy = \int_0^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x,y) dx + \int_0^2 dy \int_{2+\sqrt{4-y^2}}^4 f(x,y) dx + \\ + \int_2^4 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^4 f(x,y) dx.$$

Задания.

1. Вычислить: $\iint_D \frac{y}{x^3} dx dy$, $D = [1, 2; 4, 8]$. $\left(\text{Ответ: } 9. \right)$

2. Вычислить: $\iint_D (x^2 + y) dx dy$, если область D ограничена линиями $y = x^2$ и $y^2 = x$. $\left(\text{Ответ: } \frac{33}{140}. \right)$

3. Вычислить: $\iint_D x \cos(x + y) dx dy$, если область D ограничена линиями $y = 0$ и $x = \pi$, $y = x$. $\left(\text{Ответ: } -\frac{\pi}{2}. \right)$

4. Вычислить: $\iint_D x dx dy$, если область D ограничена линиями $y = x^2$ и $y = 2x$. $\left(\text{Ответ: } \frac{4}{3}. \right)$

5. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^4 f(x,y) dy. \quad \left(\text{Ответ: } \int_0^4 2y \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y) dx. \right)$$

6. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x f(x,y) dy. \quad \left(\text{Ответ: } \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{1}{y}}^2 f(x,y) dx + \int_1^2 dy \int_y^2 f(x,y) dx. \right)$$

7. Записать в виде одного повторного интеграла следующее выраже-

ние: $\int_{\frac{1}{2}}^2 2y \int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} f(x,y) dx + \int_2^5 dy \int_{-\sqrt{y-1}}^{3-y} f(x,y) dx.$

$\left(\text{Ответ: } \int_{-2}^1 dx \int_{x^2+1}^{3-y} f(x,y) dy. \right)$

Домашнее задание.

1. Вычислить $\iint_D xy \, dx dy$, $D = [2, 4; 1, 2]$. $\left(\text{Ответ: } 9. \right)$

2. Вычислить: $\iint_D x \, dx dy$, если область D ограничена линиями $x = 0$,
 $y = 0$, $y = \sqrt{4 - x^2}$. $\left(\text{Ответ: } \frac{8}{3}. \right)$

3. Вычислить: $\iint_D x^2 \, dx dy$, если область D ограничена линиями $y = x$,
 $y = \frac{1}{x}$, $x = 2$. $\left(\text{Ответ: } 2. \right)$

4. Вычислить: $\iint_D x^4 y \, dx dy$, если область D ограничена линиями
 $xy = 1$, $y = x$, $x = 2$. $\left(\text{Ответ: } 7\frac{19}{21}. \right)$

5. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле
 $\int_0^1 2y \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y) dx.$ $\left(\text{Ответ: } \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x,y) dy. \right)$

6. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле
 $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y) dx.$ $\left(\text{Ответ: } \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y) dy. \right)$

7. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле
 $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y) dy.$ $\left(\text{Ответ: } \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x,y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x,y) dx. \right)$

8. Записать в виде одного повторного интеграла следующее выра-

жение:
$$\int_{-1}^3 dx \int_2^{\frac{x+5}{2}} f(x, y) dy + \int_3^6 dx \int_2^{6-\frac{2}{3}x} f(x, y) dy .$$

(Ответ:
$$\int_2^4 dy \int_{2y-5}^{9-\frac{3}{2}y} f(x, y) dx .$$
)

Замена переменных в двойном интеграле.

Переход к полярным координатам

Пусть переменные x, y связаны с переменными u, v соотношениями $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, где $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ – непрерывные и дифференцируемые функции, взаимно-однозначно отображающие область D плоскости Oxy на область D' плоскости $O'uv$, при этом **якобиан**

$$J = J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

сохраняет постоянный знак в D . Тогда верна формула замены переменных в двойном интеграле

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J| du dv .$$

Известно, что прямоугольные декартовы (x, y) и полярные (ρ, φ) координаты связаны между собой следующими соотношениями:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad (\rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi).$$

Если в двойном интеграле перейти от декартовых к полярным координатам, то получим формулу (так как якобиан $J = \rho$)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi \quad (1)$$

Представление двойного интеграла в виде повторного в правой части формулы (1) приводит с разным пределам в зависимости от того, где находится полюс O полярной системы координат: вне, внутри или на границе области D .

1. Если полюс O полярной системы координат находится вне области D , ограниченной лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$) и линиями, уравнения которых $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$, где $\rho_1(\varphi)$, $\rho_2(\varphi)$ ($\rho_1(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)$) – функции, заданные на отрезке $[\alpha, \beta]$ (рис. 1), то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho \quad (2)$$

2. Если полюс O находится внутри области D и уравнение границы области D в полярной системе координат имеет вид $\rho = \rho(\varphi)$, то в формуле (2) $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, $\rho_1(\varphi) = 0$, $\rho_2(\varphi) = \rho(\varphi)$ (рис. 2).

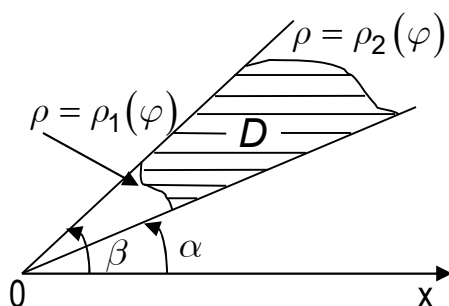


Рисунок 1

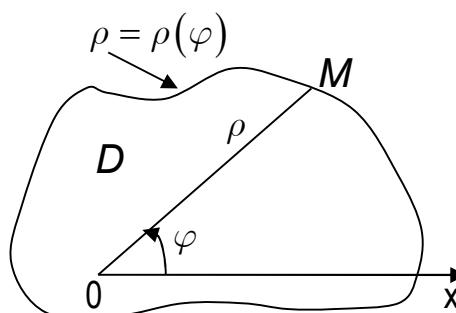


Рисунок 2

3. Если полюс O находится на границе области D и уравнение ее границы в полярной системе координат имеет вид $\rho = \rho(\varphi)$, то в формуле (2) $\rho_1(\varphi) = 0$, $\rho_2(\varphi) = \rho(\varphi)$, а α и β могут принимать разные значения (рис. 3, 4).

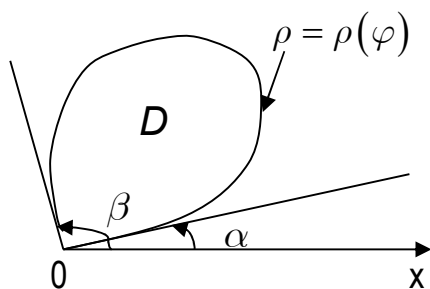


Рисунок 3

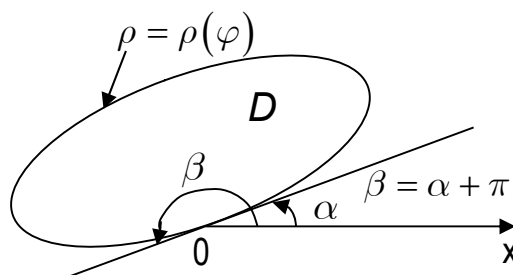


Рисунок 4

Пример 1.

Вычислить двойной интеграл, используя полярные координаты

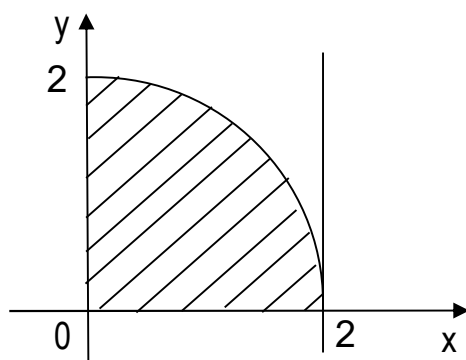
$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \cos \sqrt{x^2 + y^2} dy.$$

Решение.

Область D ограничена линиями:

$$x = 0, \quad x = 2$$

$$y = 0, \quad y = \sqrt{4 - x^2}.$$



Область D это четверть круга, расположенного в первой четверти, радиуса 2 с центром в начале координат.

При переходе к полярным координатам φ изменяется в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а ρ изменяется от 0 до 2. Следовательно,

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \cos \sqrt{x^2+y^2} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \rho \cos \rho d\rho.$$

$$\int_0^2 \rho \cos \rho d\rho = \left| \begin{array}{l} u = \rho; \quad du = d\rho; \\ dv = \cos \rho d\rho; \quad v = \sin \rho \end{array} \right| = \rho \sin \rho \Big|_0^2 - \int_0^2 \sin \rho d\rho = 2 \sin 2 + \cos \rho \Big|_0^2 = 2 \sin 2 + \cos 2 - 1.$$

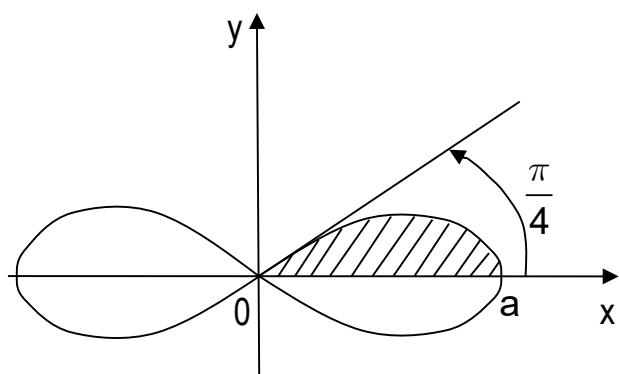
Следовательно, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \rho \cos \rho d\rho = \frac{\pi}{2} (2 \sin 2 + \cos 2 - 1).$

Пример 2.

Вычислить двойной интеграл, переходя к полярным координатам

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy,$$

D ограничена линиями $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $y = 0$, $(x > 0, y > 0)$.



Решение.

Так как $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, то

$$\begin{aligned} (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi)^2 &= \\ &= a^2 (\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi), \Rightarrow \\ \rho^4 &= a^2 \rho^2 \cos 2\varphi; \Rightarrow \rho^2 = a^2 \cos 2\varphi, \\ \rho &= a \sqrt{\cos 2\varphi} \text{ — уравнение лемнискаты.} \end{aligned}$$

В области интегрирования φ изме-

няется от 0 до $\frac{\pi}{4}$, а ρ изменяется от 0 до $a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho^3 d\rho = \int_0^{\pi/4} \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = \\ &= \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\varphi d\varphi = \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} d\varphi = \frac{a^4}{8} \left(\varphi + \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi a^4}{32}. \end{aligned}$$

Задания.

Вычислить двойные интегралы, используя полярные координаты.

1. $\iint_D \frac{y dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, D ограничена линиями $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$ ($y \geq 0$).

$\left(\text{Ответ: } 8. \right)$

$$2. \iint_D e^{x^2+y^2} dx dy, D - \text{круг } x^2 + y^2 \leq 1. \quad \left(\text{Ответ: } \pi(e-1). \right)$$

$$3. \iint_D \frac{\cos \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy, D \text{ определена неравенствами}$$

$$\frac{\pi^2}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2. \quad \left(\text{Ответ: } -2\pi. \right)$$

$$4. \iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy, D \text{ ограничена лемнискатой}$$

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2). \quad \left(\text{Ответ: } -2\pi. \right)$$

$$5. \iint_D \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, D \text{ ограничена линиями } x=0, y=0, x+y=1,$$

$$x+y=2. \quad \left(\text{Ответ: } 1. \right)$$

Домашнее задание.

$$1. \text{ Вычислить } \iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy, \text{ где } D - \text{часть кольца, ограниченного}$$

$$\text{линиями } x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 9, y = \frac{1}{\sqrt{3}}x, y = \sqrt{3}x.$$

$$\left(\text{Ответ: } \frac{\pi^2}{6}. \right)$$

$$2. \text{ Вычислить } \iint_D (12-x-y) dx dy, \text{ если область } D \text{ ограничена окруж-}$$

$$\text{ностью } x^2 + y^2 = 9. \quad \left(\text{Ответ: } 108\pi. \right)$$

$$3. \text{ Вычислить } \iint_D (4-x-y) dx dy, \text{ если область } D \text{ ограничена окруж-}$$

$$\text{ностью } x^2 + y^2 = 2x. \quad \left(\text{Ответ: } 3\pi. \right)$$

$$4. \text{ Переходя к полярным координатам, вычислить } \iint_D y dx dy, \text{ где } D -$$

$$\text{полукруг диаметра } a \text{ с центром в точке } C\left(\frac{a}{2}; 0\right). \quad \left(\text{Ответ: } \frac{a^3}{12}. \right)$$

5. Вычислить $\iint_D xy \, dx dy$, D ограничена лемнискатой

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy. \quad \left(\text{Ответ: } \frac{a^4}{6}. \right)$$

Приложения двойных интегралов

1. Вычисление площадей с помощью двойных интегралов.

Площадь S плоской области D , можно найти по формуле

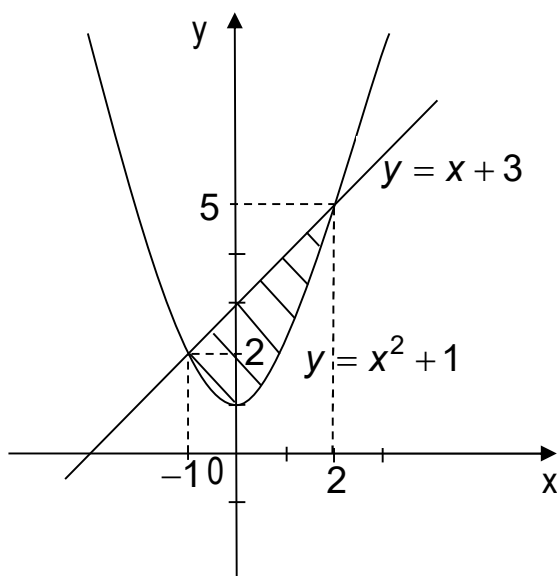
$$S = \iint_D dx dy.$$

В полярных координатах $S = \iint_D \rho d\varphi d\rho.$

Пример 1.

С помощью двойного интеграла найти площадь плоской области D , ограниченной линиями: $y = x^2 + 1$, $x - y + 3 = 0$.

Решение.



Найдем точки пересечения параболы $y = x^2 + 1$ и прямой $y = x + 3$:

$$x^2 + 1 = x + 3; \quad x^2 - x - 2 = 0.$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -1.$$

$$y_1 = 5; \quad y_2 = 2.$$

Следовательно, $A(2; 5)$, $B(-1; 2)$.

Область D – область первого вида;

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 dx \int_{x^2+1}^{x+3} dy = \int_{-1}^2 (x+3-x^2-1) dx = \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = 2 + 4 - \frac{8}{3} - \end{aligned}$$

$$-\left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = 6 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = 4,5.$$

Пример 2.

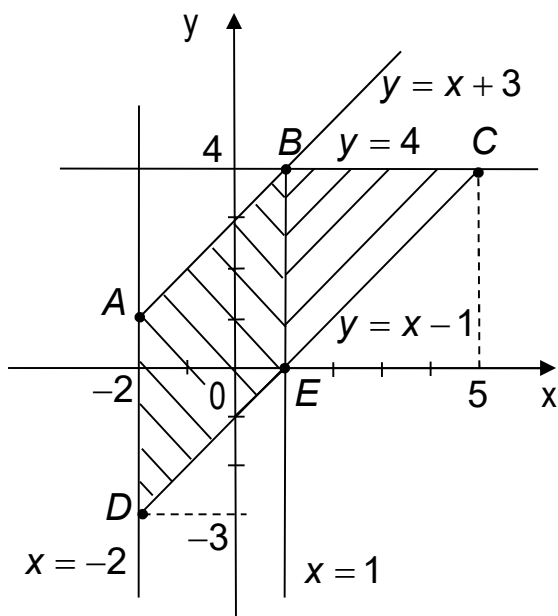
С помощью двойного интеграла найти площадь плоской области D , ограниченной линиями: $x - y + 3 = 0$, $x - y - 1 = 0$, $x + 3 = 0$, $y - 4 = 0$.

Решение.

$$y = x + 3.$$

$$y = x - 1.$$

Вершины четырехугольника $A(-2; 1)$; $B(1; 4)$; $C(5; 4)$; $D(-2; -3)$.



Разобьем данную область прямой $x = 1$ на 2 области первого вида.

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^1 dx \int_{x-1}^{x+3} dy + \int_1^5 dx \int_{x-1}^4 dy = \\
 &= \int_{-2}^1 (x+3 - x+1) dx + \int_1^5 (4 - x + 1) dx = \\
 &= \int_{-2}^1 4 dx + \int_1^5 (5 - x) dx = 4x \Big|_{-2}^1 + \left(5x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^5 = 4 + 8 + 25 - \frac{25}{2} - \left(5 - \frac{1}{2} \right) = 20.
 \end{aligned}$$

2. Вычисление объемов тел.

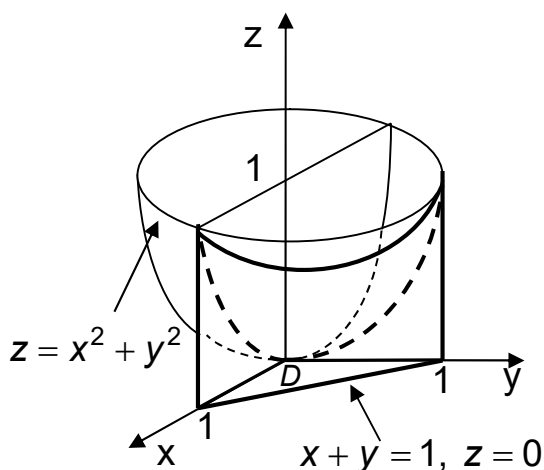
Объем V цилиндра, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости Oxy область D , равен

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Пример 3.

Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью $x + y = 1$, параболоидом вращения $z = x^2 + y^2$ и координатными плоскостями.

Решение.



Данное тело ограничено координатными плоскостями, плоскостью $x + y = 1$, параллельной оси Oz , и параболоидом вращения $z = x^2 + y^2$.

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy, \text{ где область } D$$

ограничена треугольником, лежащим в плоскости Oxy , для которого $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x$.

Следовательно,

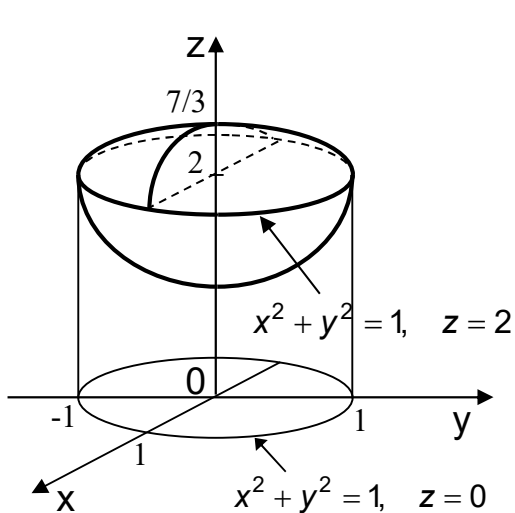
$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(x^2 - x^3 + \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx = \\
 &= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(1-x)^4}{12} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{12} \right) = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

Пример 4.

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 - z + 1 = 0$, $x^2 + y^2 + 3z = 7$.

Решение.

Данное тело ограничено двумя параболоидами. Линия пересечения параболоидов определяется системой их уравнений:



$$\begin{cases} z = 1 + x^2 + y^2; \\ 3z = 7 - x^2 - y^2. \end{cases}$$

Исключим из этих уравнений z :

$$3(1 + x^2 + y^2) = 7 - x^2 - y^2;$$

$$3 + 3x^2 + 3y^2 = 7 - x^2 - y^2; \quad 4x^2 + 4y^2 = 4; \\ x^2 + y^2 = 1.$$

Из первого уравнения при $x^2 + y^2 = 1$ имеем $z = 2$.

Итак, линией пересечения является окружность $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2$. (пересечение

прямого кругового цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ и плоскости $z = 2$).

Проекция этой линии на плоскости Oxy так же является окружностью $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

Искомый объем равен разности объемов двух цилиндрических тел с одним основанием и ограниченных сверху и снизу соответственно поверхностями $z = \frac{1}{3}(7 - x^2 - y^2)$, $z = 1 + x^2 + y^2$, т.е.

$$V = V_1 - V_2 = \iint_S \frac{1}{3}(7 - x^2 - y^2) dx dy - \iint_S (1 + x^2 + y^2) dx dy,$$

где D – круг $x^2 + y^2 \leq 1$.

Переходя к полярным координатам, находим

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{1}{3}(7 - \rho^2) \rho d\rho - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho + \rho^3) d\rho = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(7 \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^1 d\varphi - \\ - \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^1 d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{4} \right) d\varphi - \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) d\varphi = \frac{1}{3} \cdot \frac{13}{4} \cdot 2\pi - \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{2}{3} \pi.$$

Приложения двойных интегралов в механике

1. Масса и статические моменты пластинки.

Если D – область плоскости Oxy , занятая пластинкой, а $\gamma(x, y)$ – поверхностная плотность пластинки в точке $P(x, y)$, то ее масса M выражается формулой

$$M = \iint_D \gamma(x, y) dx dy,$$

а статические моменты M_x и M_y относительно осей Ox и Oy определяются двойными интегралами

$$M_x = \iint_D y \cdot \gamma(x, y) dx dy, \quad M_y = \iint_D x \cdot \gamma(x, y) dx dy.$$

Если пластинка однородна, то $\gamma(x, y) = \text{const}$; эту постоянную часто полагают равной единице.

2. Координаты центра тяжести пластины.

Если $C(x_0, y_0)$ – центр тяжести пластины, то $x_0 = \frac{M_y}{M}$, $y_0 = \frac{M_x}{M}$, где M – масса пластинки; M_x и M_y – статические моменты пластинки относительно осей Ox и Oy .

Если пластина однородна $\gamma(x, y) = \text{const}$.

Тогда **формулы для определения координат центра:**

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x dx dy}{\iint_D dx dy}; \quad y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y dx dy}{\iint_D dx dy}.$$

Моменты инерции пластинки относительно осей Ox и Oy соответственно определяются формулами:

$$I_x = \iint_D y^2 \gamma(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_D x^2 \gamma(x, y) dx dy.$$

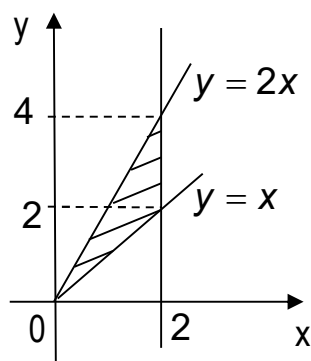
Момент инерции пластинки относительно начала координат

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dx dy = I_x + I_y.$$

Пример 5.

Найти координаты центра масс пластинки, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$, если ее плотность $\gamma(x, y) = xy$.

Решение.



Найдем массу M пластинки:

$$\begin{aligned} M &= \iint_D \gamma(x, y) dx dy = \iint_D xy dx dy = \int_0^2 dx \int_x^{2x} xy dy = \\ &= \int_0^2 x \frac{y^2}{2} \Big|_x^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x (4x^2 - x^2) dx = \\ &= \frac{3}{2} \int_0^2 x^3 dx = \frac{3}{2} \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = 6. \end{aligned}$$

Найдем статические моменты M_x и M_y :

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_D y \cdot xy dx dy = \iint_D xy^2 dx dy = \int_0^2 dx \int_x^{2x} xy^2 dy = \int_0^2 x \frac{y^3}{3} \Big|_x^{2x} dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^2 x (8x^3 - x^3) dx = \frac{1}{3} \int_0^2 x^4 dx = \frac{7}{3} \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{224}{15}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_D x \gamma(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_x^{2x} x^2 y dy = \int_0^2 x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_x^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 (4x^2 - x^2) dx = \\ &= \frac{3}{2} \int_0^2 x^4 dx = \frac{3}{2} \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{96}{10} = \frac{48}{5}; \end{aligned}$$

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{48}{5 \cdot 6} = \frac{8}{5}; \quad y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{224}{15 \cdot 6} = \frac{112}{45}.$$

Пример 6.

Найти моменты инерции однородной полукруглой пластины $0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$ относительно осей Ox и Oy .

Решение.

Полагая $\gamma(x, y) = 1$, находим

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2 dx dy = \int_{-R}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} y^2 dy = \int_{-R}^R \frac{y^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \frac{1}{3} \int_{-R}^R (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \\ &= \frac{2}{3} \int_0^R (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \left| \begin{array}{l} x = R \sin t; \quad dx = R \cos t \, dt \\ \alpha = 0; \quad \beta = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} (R^2 - R^2 \sin^2 t)^{3/2} \cdot R \cos t \, dt = \frac{2}{3} R^4 \int_0^{\pi/2} (\cos^3 t) \cos t \, dt = \\
&= \frac{2}{3} R^4 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right)^2 dt = \frac{2}{3} R^4 \cdot \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (1 + 2 \cos 2t + \cos^2 2t) dt = \frac{R^4}{6} t \Big|_0^{\pi/2} + \\
&+ \frac{R^4}{6} \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} + \frac{R^4}{6} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 4t}{2} dt = \frac{1}{6} R^4 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{t}{2} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{8} \sin 4t \Big|_0^{\pi/2} \right) = \\
&= \frac{1}{6} R^4 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{6} R^4 \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi R^4}{8};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_y &= \iint_D x^2 dx dy = \int_{-R}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} x^2 dy = \int_{-R}^R x^2 y \Big|_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \int_{-R}^R x^2 \sqrt{R^2 - x^2} dx = \\
&= 2 \int_0^R x^2 \sqrt{R^2 - x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = R \sin t; \, dx = R \cos t \, dt; \\ \alpha = 0; \, \beta = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \\
&= 2 \int_0^{\pi/2} R^2 \sin^2 t \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t} \cdot R \cos t \, dt = 2R^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t \, dt = \\
&= 2R^4 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 2t}{4} dt = \frac{R^4}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{R^4}{4} \left(t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{4} \sin 4t \Big|_0^{\pi/2} \right) = \\
&= \frac{R^4}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi R^4}{8}.
\end{aligned}$$

Итак, $I_x = \frac{\pi R^4}{8}; \quad I_y = \frac{\pi R^4}{8}.$

Задания.

1. Вычислить площади фигур, ограниченных следующими линиями:

1) $y = \sqrt{x}, \, y = 2\sqrt{x}, \, x = 4.$ $\left(\text{Ответ: } \frac{16}{3}. \right)$

2) $y = 2 - x, \, y^2 = 4x + 4.$ $\left(\text{Ответ: } \frac{64}{3}. \right)$

3) $\rho = a \sin 2\varphi, \, a > 0.$ $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2} \pi a^2. \right)$

- 4) $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $y = 0$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}a^2 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)$
2. Вычислить объемы тел, ограниченных указанными поверхностями:
- 1) плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 4$, $y = 4$ и параболоидом $z = 1 + x^2 + y^2$. $\left(\text{Ответ: } 186\frac{2}{3} \right)$
- 2) параболоидом $z = x^2 + y^2$ и плоскостями $z = 0$, $y = 1$, $y = 2x$, $y = 6 - x$. $\left(\text{Ответ: } 78\frac{15}{32} \right)$
3. Вычислить координаты центра масс фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y^2 = x$, если плотность фигуры $\mu(x, y) = xy$. $\left(\text{Ответ: } x_0 = \frac{9}{14}; y_0 = \frac{3}{56} \right)$

Домашнее задание.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4x - x^2$, $y = 2x^2 - 5x$. $\left(\text{Ответ: } \frac{27}{2} \right)$
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x = 4 - y^2$, $x + 2y - 4 = 0$. $\left(\text{Ответ: } \frac{4}{3} \right)$
3. Переходя к полярным координатам, найти площадь области, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = 0$. $\left(\text{Ответ: } 3 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) \right)$
4. Вычислить объем тел, ограниченных указанными поверхностями:
- 1) цилиндром $x^2 + y^2 = 4$ и плоскостями $z = 0$, $z = x + y + 10$. $\left(\text{Ответ: } 40\pi \right)$
- 2) $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $x + y + z = 4$. $\left(\text{Ответ: } 4\pi \right)$
5. Вычислить координаты центра масс однородной фигуры, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $y = -x^2 + 2x$, $y = 0$. $\left(\text{Ответ: } x_0 = 1, y_0 = \frac{1}{4} \right)$

Тройной интеграл

Основные сведения

Рассмотрим замкнутую пространственную область (V) и функцию $f(x, y, z)$, определенную в этой области. Область (V) разобьем произвольно на n элементарных областей $(V_1), (V_2), \dots, (V_n)$ с диаметрами d_1, d_2, \dots, d_n и объемами $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$. В каждой элементарной области (V_i) возьмем произвольную точку $P_i(x_i, y_i, z_i)$ и образуем произведение $f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$.

Интегральной суммой для функции $f(x, y, z)$ по области (V) называется сумма вида $\sum_{k=1}^n f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$.

Тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ области (V) называется конечный предел интегральной суммы при условии, что $\max d_k \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$):

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \lim_{\max d_k \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i \quad (1)$$

Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в области (V) , то указанный предел существует и конечен (он не зависит от способа разбиения области (V) на элементарные области и от выбора точек P_i).

Основные свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов.

В прямоугольных декартовых координатах тройной интеграл обычно записывают в виде

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz$$

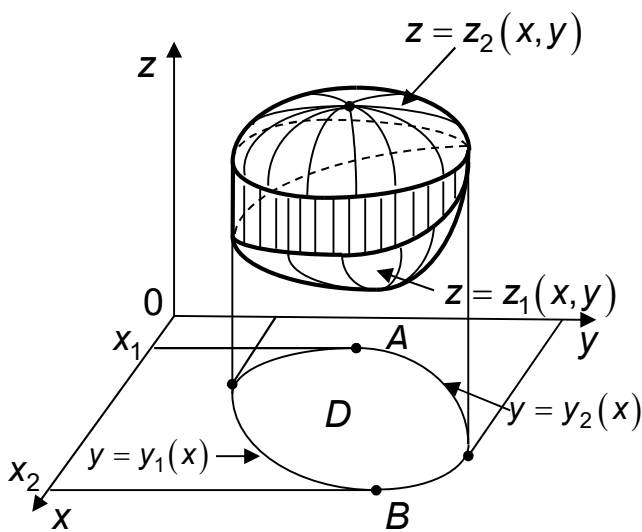
(так как $dV = dx dy dz$).

Если область интегрирования (V) определяется неравенствами:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &\leq x \leq x_2 \\ y_1(x) &\leq y \leq y_2(x) \\ z_1(x, y) &\leq z \leq z_2(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $y_1(x), y_2(x), z_1(x, y), z_2(x, y)$ – непрерывные функции своих аргументов, то тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (3)$$



Область (V) ограничена сверху поверхностью $z = z_2(x, y)$, снизу – поверхностью $z = z_1(x, y)$, а с боков – цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz (рис.), вырезающей на плоскости Oxy область D , определенную неравенствами $x_1 \leq x \leq x_2$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$.

Порядок интегрирования может быть изменен; тройной интеграл можно вычислить шестью различными способами.

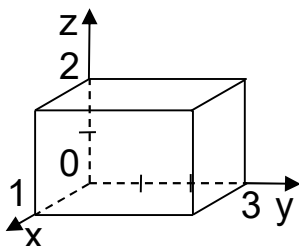
В частном случае, если функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ являются постоянными y_1 , y_2 , z_1 , z_2 , то область интегрирования представляет собой прямоугольный параллелепипед и тогда

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z) dz \quad (3')$$

Для вычисления тройного интеграла в прямоугольных координатах применяется также формула, которая иногда упрощает вычисления:

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \iint_{D_x} f(x, y, z) dy dz, \quad (4)$$

где область D_x – проекция на Oyz сечения области (V) плоскостью, параллельной плоскости Oyz и проходящей через произвольную точку интервала $(x_1; x_2)$.



Пример 1. Вычислить тройной интеграл

$$\int_0^1 dx \int_0^3 dy \int_0^2 (x + y + z) dz.$$

Решение.

Пределы интегрирования в каждом из интегралов являются постоянными. Область интегрирования – прямоугольный параллелепипед с измерениями $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$, одна из вершин которого находится в начале координат.

$$\int_0^1 dx \int_0^3 dy \int_0^2 (x + y + z) dz = \int_0^1 \left\{ \int_0^3 \left[\int_0^2 (x + y + z) dz \right] dy \right\} dx.$$

Вычисляем внутренний интеграл, находящийся в квадратных скобках, считая x и y постоянными:

$$\int_0^2 (x + y + z) dz = \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_{z=0}^{z=2} = 2x + 2y + 2 = 2(x + y + 1).$$

Второй интеграл, находящийся в фигурных скобках, принимает вид

$$\int_0^3 \left[\int_0^2 (x + y + z) dz \right] dy = \int_0^3 2(x + y + 1) dy = 2 \int_0^3 (x + y + 1) dy.$$

Находим этот интеграл, считая x постоянным:

$$2 \int_0^3 (x + y + 1) dy = 2 \left(xy + \frac{y^2}{2} + y \right) \Big|_{y=0}^{y=3} = 6x + 15.$$

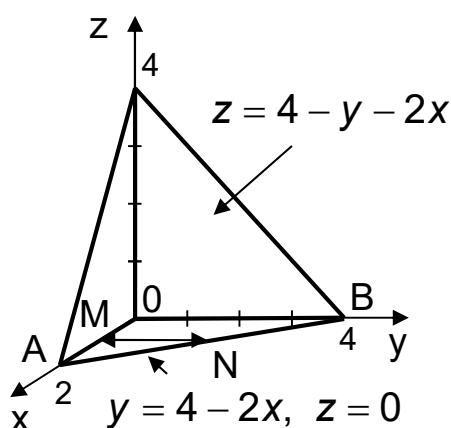
Вычисляем внешний интеграл:

$$\int_0^1 \left\{ \int_0^3 \left[\int_0^2 (x + y + z) dz \right] dy \right\} dx = \int_0^1 (6x + 15) dx = \left(3x^2 + 15x \right) \Big|_0^1 = 18.$$

Итак, $\int_0^1 dx \int_0^3 dy \int_0^2 (x + y + z) dz = 18.$

Замечание. Интегрировать можно и в другом порядке. В частности

$$\int_0^2 dz \int_0^3 dy \int_0^1 (x + y + z) dx = \int_0^2 dz \int_0^3 \left(y + z + \frac{1}{2} \right) dy = \int_0^2 (6 + 3z) dz = 18.$$



Пример 2. Вычислить $\iiint_V y dx dy dz$, где (V)

– треугольная пирамида, ограниченная плоскостью $2x + y + z - 4 = 0$ и плоскостями координат.

Решение.

Расставим пределы интегрирования. Плоскость $2x + y + z - 4 = 0$ пересекает плоскость Oxy по прямой $2x + y + z - 4 = 0$, $z = 0$ или $2x + y - 4 = 0$, $z = 0$. В плоскости Oxy эта прямая, проходящая через точки A и B , определяется уравнением $2x + y - 4 = 0$.

Треугольник OAB и его внутренние точки являются областью D_{xy} изменения переменных x и y (в эту область проектируется данная пирамида на плоскость Oxy). Очевидно, x изменяется в промежутке $[0, 2]$, т.е. $0 \leq x \leq 2$, при фиксированном x из этого промежутка (абсцисса точки M) y будет изменяться от 0 (ордината точки M) до $4 - 2x$ (ордината точки N) (получена из уравнения прямой $2x + y - 4 = 0$). При фиксированных x и y из области D_{xy} z будет изменяться от 0 до $4 - y - 2x$ (получено из уравнения $2x + y + z - 4 = 0$). Таким образом

$$\iiint_{(V)} y dx dy dz = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} dy \int_0^{4-y-2x} y dz.$$

Поскольку $\int_0^{4-y-2x} y dz = yz \Big|_{z=0}^{z=4-y-2x} = y(4-y-2x) = 4y - y^2 - 2xy$;

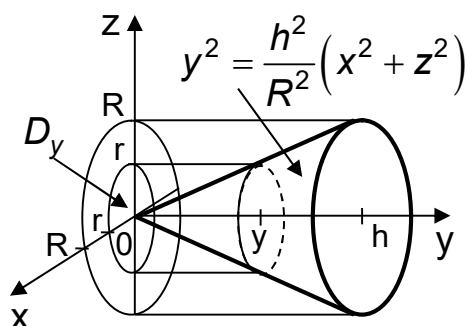
$$\int_0^{4-2x} (4y - y^2 - 2xy) dy = \left(2y^2 - \frac{y^3}{3} - xy^2 \right) \Big|_{y=0}^{y=4-2x} = y^2 \left(2 - \frac{y}{3} - \right.$$

$$\left. -x \right) \Big|_{y=0}^{y=4-2x} = (4-2x)^2 \left(2 - \frac{4-2x}{3} - x \right) = \frac{1}{6}(4-2x)^3, \text{ то}$$

$$\int_0^2 dx \int_0^{4-2x} dy \int_0^{4-y-2x} y dz = \int_0^2 \frac{1}{6}(4-2x)^3 dx = -\frac{1}{12} \frac{(4-2x)^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{1}{12} \frac{4^4}{4} = \frac{16}{3}.$$

Пример 3. Вычислить $\iiint_{(V)} y dx dy dz$, где область (V) ограничена кону-

сом $y^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + z^2)$ и плоскостью $y = h$.



Решение.

Применим второй способ решения, для чего перепишем формулу (4) меняя в этой формуле роли переменных x и y , получаем

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{y_1}^{y_2} dy \iint_{D_y} f(x, y, z) dx dz, \quad (4')$$

где D_y – проекция на Oxz сечения области (V) плоскостью, параллельной плоскости Oxz , проходящей через произвольную точку интервала $(y_1; y_2)$.

В нашем случае формула (4') имеет вид:

$$\iiint_{(V)} y dx dy dz = \int_0^h y dy \iint_{D_y} dx dz, \text{ где } D_y - \text{ круг радиуса } r = \frac{Ry}{h} \text{ (выражение}$$

для радиуса r получено из подобия соответствующих треугольников, действительно, $\frac{R}{r} = \frac{h}{y} \Rightarrow r = \frac{Ry}{h}$.)

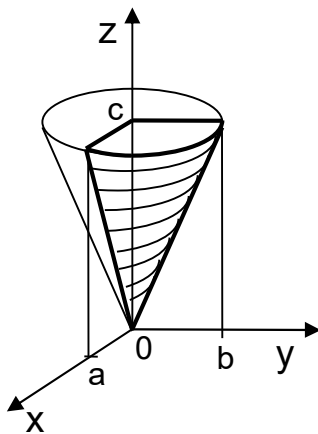
Так как двойной интеграл $\iint_{D_y} dx dz$ выражает площадь области D_y , которая равна $\pi r^2 = \frac{\pi R^2 y^2}{h^2}$, то $\iint_{D_y} dx dz = \frac{\pi R^2 y^2}{h^2}$. Следовательно,

$$\iiint_{(V)} y dx dy dz = \int_0^h y dy \iint_{D_y} dx dz = \int_0^h \frac{\pi R^2 y^3}{h^2} dy = \frac{\pi R^2}{h^2} \frac{y^4}{4} \Big|_0^h = \frac{\pi R^2 h^2}{4}.$$

Пример 4.

Вычислить $\iiint_{(V)} \frac{xy}{\sqrt{z}} dx dy dz$, где (V) – область, ограниченная конусом

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ ($x \geq 0, y \geq 0$), плоскостью $z = c$ и координатными плоскостями.



Решение.

Будем интегрировать сначала по x , затем по y и, наконец, по z , для чего воспользуемся формулой

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} dy \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx,$$

аналогичной формуле (3) для случая области (V) , определяемой неравенствами: $z_1 \leq z \leq z_2$, $y_1(z) \leq y \leq y_2(z)$, $x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z)$.

Область (V) проектируется на плоскость Oyz в виде треугольника, ограниченного прямыми $y = 0$, $z = c$, $y = \frac{b}{c} z$. Эта область определяется

неравенствами: $0 \leq z \leq c$, $0 \leq y \leq \frac{b}{c} z$, $0 \leq x \leq a \sqrt{\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}}$, поэтому

$$\iiint_{(V)} \frac{xy}{\sqrt{z}} dx dy dz = \int_0^c \frac{dz}{\sqrt{z}} \int_0^{\frac{b}{c}z} y dy \int_0^{a\sqrt{\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}}} x dx.$$

Так как $\int_0^{a\sqrt{\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}}} x dx = \frac{a^2}{2} \left(\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} \right),$

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{b}{c}z} \left(\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) y dy &= \frac{a^2}{2} \left(\frac{z^2}{c^2} \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4b^2} \right) \Big|_{y=0}^{y=\frac{b}{c}z} = \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\frac{z^2}{2c^2} \frac{b^2}{c^2} z^2 - \frac{1}{4b^2} \frac{b^4 z^4}{c^4} \right) = \frac{a^2}{2} \left(z^4 \frac{b^2}{2c^4} - \frac{z^4 b^2}{4c^4} \right) = \frac{1}{8} \frac{a^2 b^2}{c^4} z^4, \text{ то} \end{aligned}$$

$$\iiint_{(V)} \frac{xy}{\sqrt{z}} dx dy dz = \frac{a^2 b^2}{8c^4} \int_0^c z^{\frac{7}{2}} dz = \frac{a^2 b^2}{8c^4} z^{\frac{9}{2}} \Big|_{z=0}^{z=c} = \frac{a^2 b^2}{36c^4} \sqrt{c^9} = \frac{1}{36} a^2 b^2 \sqrt{c}.$$

Задания.

1. Вычислить $\iiint_{(V)} x^2 y^2 z dx dy dz$, если область (V) определяется не-

равенствами $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq xy$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{110}. \right)$

2. Вычислить $\iiint_{(V)} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$, если область (V) ограничена $x=0$,

$y=0, z=0, x+y+z=1$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right). \right)$

3. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint_{(V)} f(x,y,z) dx dy dz$, если область (V) ограничена поверхностями:

$(V): x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y=1, z=3x^2+2y^2$.

4. Вычислить $\iiint_{(V)} z^3 dx dy dz$, (V) ограничена конусом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$

$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$, плоскостью $z=c$ и координатными плоскостями.

$\left(\text{Ответ: } \frac{abc^4}{6}. \right)$

Домашнее задание.

1. Расставить пределы интегрирования в интеграле

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz, \text{ если область } (V) \text{ ограничена плоскостями } x = 0, y = 0, z = 0, 2x + 3y + 4z = 12.$$

2. Вычислить $\iiint_{(V)} z dx dy dz$, (V) определена неравенствами: $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$,

$$x \leq y \leq 2x, 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}. \quad \left(\text{Ответ: } \frac{7}{192}. \right).$$

3. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz, \text{ если } (V): x \geq 0, y = 3x, y = 3, z \geq 0, x = 3\sqrt{z}.$$

4. Вычислить $\iiint_{(V)} (x + 2y + 3z + 4) dx dy dz$, $(V): 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2,$

$$0 \leq z \leq 1. \quad \left(\text{Ответ: } 54. \right)$$

Замена переменных в тройном интеграле

Переход к сферическим и цилиндрическим координатам

Если ограниченная замкнутая область (V) пространства $Oxyz$ взаимно однозначно отображается на область (V') пространства $O'uvw$ с помощью непрерывно дифференцируемых функций

$$x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w) \quad (1)$$

и якобиан J в области (V') не обращается в нуль:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то справедлива формула

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(V')} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] |J| du dv dw. \quad (2)$$

В частности, при переходе от декартовых координат x, y, z к цилиндрическим координатам ρ, φ, z (рис. 1), связанными формулами:

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = z \\ (0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\infty < z < +\infty),$$

якобиан преобразования $J = \rho$, поэтому

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(V')} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz. \quad (3)$$

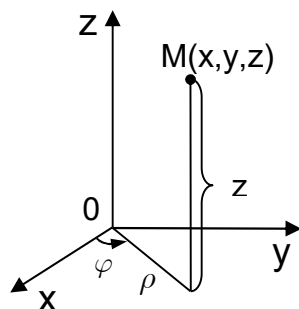


Рисунок 1

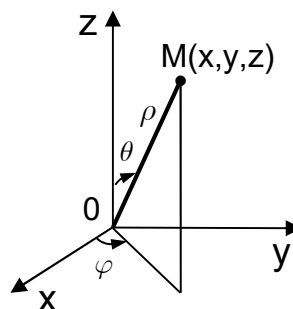


Рисунок 2

При переходе от декартовых координат x, y, z к сферическим координатам ρ, φ, θ (рис. 2), связанными соотношениями

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta$$

$$(0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi),$$

якобиан преобразования $J = \rho^2 \sin \theta$ и формула (2) принимает вид

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(V')} f[\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta] \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta. \quad (4)$$

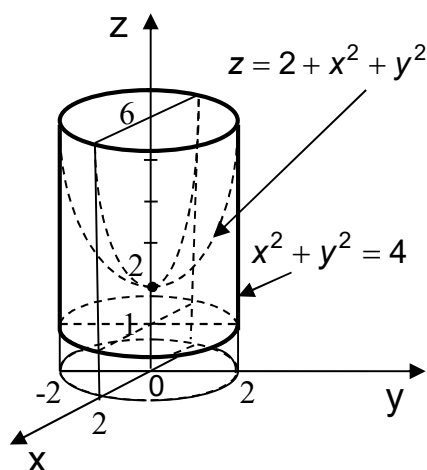
В обобщенных сферических координатах $x = a\rho \sin \theta \cos \varphi$, $y = b\rho \sin \theta \sin \varphi$, $z = c\rho \cos \theta$, $J = abc\rho^2 \sin \theta$.

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(V')} f[\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta] \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Пример 1. Вычислить $I = \iiint_{(V)} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, если область

интегрирования (V) ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 4$, $z = 1$, $z = 2 + x^2 + y^2$.

Решение.



Перейдем в заданном интеграле к цилиндрической системе координат:

$$I = \iiint_{(V)} \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^2 d\rho \int_1^{2+\rho^2} dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^2 (1 + \rho^2) d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (\rho^2 + \rho^4) d\rho =$$

$$= 2\pi \left(\frac{\rho^3}{3} + \frac{\rho^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{272}{15} \pi.$$

Пример 2. Вычислить тройной интеграл $\iiint_{(V)} z dx dy dz$, где (V) – область, ограниченная верхней частью конуса $\frac{x^2 + y^2}{R^2} = \frac{z^2}{h^2}$ и плоскостью $z = h$ ($h > 0$).

Решение.

Введем цилиндрические координаты по формулам:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

Уравнение конуса принимает вид $\frac{\rho^2}{R^2} = \frac{z^2}{h^2}$ или $z = \pm \frac{h}{R} \rho$.

Новые переменные в области (V') изменяются в следующих пределах: ρ от 0 до R , φ от 0 до 2π , z от $\frac{h}{R} \rho$ до h . По формуле (3)

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} z dx dy dz &= \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{h}{R}\rho}^h \rho z dz = \int_0^R \left\{ \int_0^{2\pi} \rho \frac{z}{2} \Big|_{z=\frac{h}{R}\rho}^{z=h} d\varphi \right\} d\rho = \\ &= \int_0^R \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{2R^2} \rho^2 \right) \rho d\varphi \right\} d\rho = \frac{\pi h^2}{R^2} \int_0^R (R^2 - \rho^2) \rho d\rho = \frac{\pi h^2}{R^2} R^2 \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^R - \\ &- \frac{\pi h^2}{R^2} \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi h^2 R^2}{2} - \frac{\pi h^2 R^2}{4} = \frac{\pi h^2 R^2}{4}. \end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить тройной интеграл $\iiint_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, где область (V) есть шар $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Решение.

Перейдем к сферическим координатам:

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta \quad (*)$$

В области (V') , являющейся образом области (V) при преобразовании (*), переменные ρ , φ и θ меняются в следующих пределах: ρ от 0 до R , φ от 0 до 2π , θ от 0 до π .

Так как подынтегральная функция

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \rho^2 \cos^2 \theta = \rho^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \rho^2,$$

а якобиан преобразования (*) равен $J = \rho^2 \sin \theta$, то по формуле (4)

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz &= \int_0^R d\rho \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \rho^2 \rho^2 \sin \theta d\varphi = \int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= 2\pi \int_0^R \rho^4 d\rho (-\cos \theta) \Big|_0^\pi = 2\pi (1+1) \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^R = \frac{4\pi R^5}{5}. \end{aligned}$$

Пример 4. Вычислить $\iiint_{(V)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz$, где область (V)

ограничена эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение.

Введем обобщенные сферические координаты по формулам:

$$x = a\rho \sin\theta \cos\varphi, \quad y = b\rho \sin\theta \sin\varphi, \quad z = c\rho \cos\theta \quad (5)$$

Якобиан $J = abc\rho^2 \sin\theta$.

Подинтегральная функция по формулам (5) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} &= \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi - \rho^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi - \rho^2 \cos^2\theta} = \\ &= \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2\theta - \rho^2 \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \rho^2}, \text{ а уравнение эллипсоида запишется} \\ &\text{так: } \rho^2 = 1 \text{ или } \rho = 1. \end{aligned}$$

В области (V') переменные ρ , θ , φ изменяются в следующих пределах: ρ от 0 до 1, θ от 0 до π , φ от 0 до 2π . По формуле (2)

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} abc \rho^2 \sin\theta d\rho = \\ &= abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \rho^2 d\rho. \end{aligned}$$

С помощью подстановки $\rho = \sin t$ находим первый интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \rho^2 d\rho &= \left| \begin{array}{l} \rho = \sin t; \quad d\rho = \cos t dt \\ \sqrt{1 - \sin^2 t}; \quad \alpha = 0; \beta = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \sin^2 t \cos t dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = \frac{1}{8} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

$$\text{Далее, } \int_0^\pi \sin\theta d\theta = -\cos\theta \Big|_0^\pi = 1 + 1 = 2.$$

$$\text{Поэтому } \iiint_{(V)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz = abc \frac{\pi}{16} \cdot 2 \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi^2 abc}{4}.$$

Задания.

Вычислить тройной интеграл с помощью цилиндрических или сферических координат.

1. $\iiint_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, (V): x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

$\left(\text{Ответ: } \frac{16\pi}{5}. \right)$

2. $\iiint_{(V)} \frac{y^2 z dx dy dz}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, (V): y \geq 0, y \leq \sqrt{3}x, z = 3(x^2 + y^2), z = 3.$

$\left(\text{Ответ: } \frac{3(4\pi - 3\sqrt{3})}{20}. \right)$

3. $\iiint_{(V)} \frac{xy dx dy dz}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, (V): z = x^2 + y^2, y \geq 0, y \leq x, z = 4.$

$\left(\text{Ответ: } \frac{4}{3}. \right)$

4. $\iiint_{(V)} \frac{z dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, (V): x^2 + y^2 = 4y, y + z = 4, z \geq 0.$

$\left(\text{Ответ: } \frac{1472}{45}. \right)$

5. $\iiint_{(V)} x^2 dx dy dz, (V): 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, (V): y \geq 0, y \leq x, z \geq 0.$

$\left(\text{Ответ: } \frac{341(\pi + 2)}{20}. \right)$

Домашнее задание.

Вычислить тройной интеграл с помощью цилиндрических или сферических координат.

1. $\iiint_{(V)} \frac{x^2 z dx dy dz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, (V): x^2 + y^2 + z^2 = 16, z \geq 0.$

$\left(\text{Ответ: } \frac{16\pi}{3}. \right)$

2. $\iiint_{(V)} \frac{xz dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, (V): z = 2(x^2 + y^2), y \geq 0, y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}x, z = 18.$
 $\left(\text{Ответ: } 81. \right)$
3. $\iiint_{(V)} \frac{y dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, (V): x^2 + y^2 = 2x, x + z = 2, y \geq 0, z \geq 0.$
 $\left(\text{Ответ: } \frac{4}{5}. \right)$
4. $\iiint_{(V)} \frac{z dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, (V): 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, y \geq 0, y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}x, z \geq 0.$
 $\left(\text{Ответ: } \frac{13\pi}{8}. \right)$

Приложения тройного интеграла

Вычисление объемов, массы тела. Центра масс и моменты инерции тела

Объем V области (V) выражается формулой

$$V = \iiint_{(V)} dx dy dz \quad (1)$$

В сферических координатах этот интеграл имеет вид

$$V = \iiint_{(V')} \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi, \quad (2)$$

а в цилиндрических координатах

$$V = \iiint_{(V'')} \rho d\rho d\varphi dz \quad (3)$$

Если тело занимает объем V и $\gamma = \gamma(x, y, z)$ – плотность его в точке $M(x, y, z)$, то **масса тела**:

$$m = \iiint_{(V)} \gamma(x, y, z) dx dy dz \quad (4)$$

Координаты центра масс этого тела определяются по формулам:

$$x_c = \frac{1}{m} \iiint_{(V)} \gamma x dx dy dz, \quad y_c = \frac{1}{m} \iiint_{(V)} \gamma y dx dy dz, \quad z_c = \frac{1}{m} \iiint_{(V)} \gamma z dx dy dz \quad (5)$$

Если тело однородно, в формулах (5) можно положить $\gamma = 1$. **Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей** определяются интегралами

$$I_{xy} = \iiint_{(V)} \gamma z^2 dx dy dz, \quad I_{xz} = \iiint_{(V)} \gamma y^2 dx dy dz, \quad I_{yz} = \iiint_{(V)} \gamma x^2 dx dy dz \quad (6)$$

Момент инерции тела относительно некоторой оси Ou определяется интегралом

$$I_u = \iiint_{(V)} \gamma r^2 dx dy dz, \quad (7)$$

где r – расстояние точки $N(x, y, z)$ тела от оси Ou .

В частности, **моменты инерции тела относительно координатных осей Ox , Oy , Oz** определяются формулами:

$$I_x = \iiint_{(V)} \gamma (y^2 + z^2) dx dy dz, \quad I_y = \iiint_{(V)} \gamma (x^2 + z^2) dx dy dz, \quad (8)$$

$$I_z = \iiint_{(V)} \gamma (x^2 + y^2) dx dy dz$$

Момент **инерции тела относительно начала координат** определяется формулой

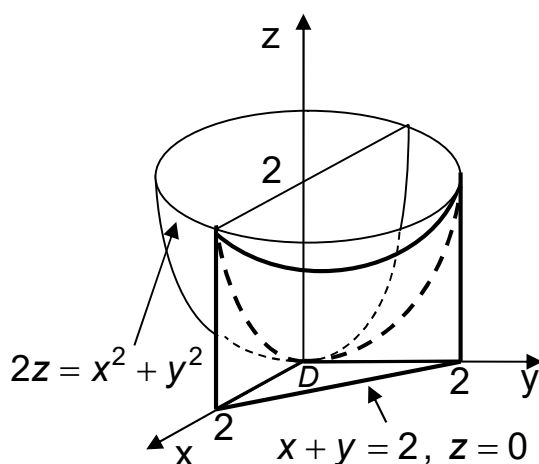
$$I_0 = \iiint_{(V)} \gamma (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \quad (9)$$

Очевидно, имеют место следующие соотношения:

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{yx} + I_{yz}, \quad I_z = I_{zx} + I_{zy}, \quad I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}.$$

Пример 1. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$, $2z = x^2 + y^2$.

Решение.



Уравнение $2z = x^2 + y^2$ определяет параболоид вращения, остальные поверхности – плоскости.

По формуле (1):

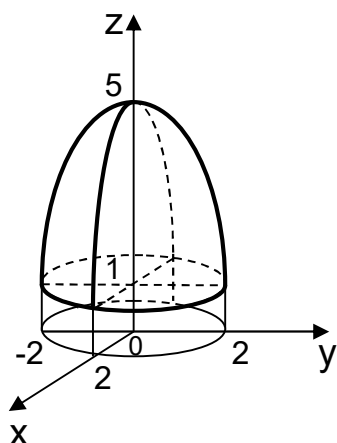
$$V = \iiint_{(V)} dx dy dz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{(x^2+y^2)/2} dz =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} z \left| \frac{x^2 + y^2}{2} \right| dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x^2 + y^2) dy = \frac{1}{2} \int_0^2 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{2-x} dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(x^2(2-x) + \frac{1}{3}(2-x)^3 \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \left(2x^2 - x^3 + \frac{1}{3}(2-x)^3 \right) dx = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{12}(2-x)^4 \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{16}{3} - 4 + \frac{1}{12}16 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 1$, $z = 5 - x^2 - y^2$.

Решение.



По заданным уравнениям поверхностей в декартовых координатах строим область (V) . Тогда в цилиндрической системе координат искомый объем

$$V = \iiint_{(V')} \rho d\rho d\varphi dz,$$

где $(V') : \{0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2, 1 \leq z \leq 5 - \rho^2\}$.

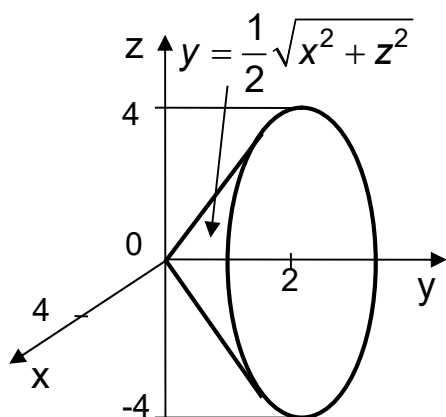
Следовательно,

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \int_1^{5-\rho^2} dz = 2\pi \int_0^2 (4\rho - \rho^3) d\rho = 2\pi \left(2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^2 = 8\pi.$$

Пример 3. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями $y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + z^2}$, $y = 2$.

Решение.

Данное тело симметрично относительно оси Oy , поэтому $x_c = z_c = 0$, а



$$y_c = \frac{\iiint_{(V)} y dx dy dz}{\iiint_{(V)} dx dy dz},$$

где масса тела $M = \iiint_{(V)} dx dy dz$, при условии, что плотность $\gamma(x, y, z) = 1$.

Переходим к цилиндрическим координатам по формулам $x = \rho \cos \varphi$, $z = \rho \sin \varphi$, $y = y$. Тогда

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} y dx dy dz &= \iiint_{(V')} y \rho d\rho d\varphi dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho d\rho \int_{\frac{\rho}{2}}^2 y dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho d\rho \frac{y^2}{2} \Big|_{\frac{\rho}{2}}^2 = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho \left(2 - \frac{\rho^2}{8} \right) d\rho = \int_0^{2\pi} \left(\rho^2 - \frac{\rho^4}{32} \right) \Big|_0^4 d\varphi = 2\pi \left(16 - \frac{64 \cdot 4}{32} \right) = 16\pi. \end{aligned}$$

Найдем массу M тела ($\gamma = 1$).

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{(V)} dx dy dz = \iiint_{(V')} \rho d\varphi d\rho dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho d\rho \int_{\frac{\rho}{2}}^2 dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho \left(2 - \frac{1}{2}\rho \right) d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \left(2\rho - \frac{\rho^2}{2} \right) d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\rho^2 - \frac{\rho^3}{6} \right) \Big|_0^4 = 2\pi \left(16 - \frac{64}{6} \right) = \frac{32}{3} \pi. \end{aligned}$$

Следовательно, $y_c = \frac{16\pi \cdot 3}{32\pi} = \frac{3}{2}$ и центр масс $C\left(0; \frac{3}{2}; 0\right)$.

Пример 4. Вычислить моменты инерции однородного шара радиусом R и весом P относительно его центра и диаметра.

Решение.

Так как объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, то его постоянная плотность $\gamma = \frac{3P}{4g\pi R^3}$. Поместим центр шара в начале координат, тогда его поверхность будет определяться уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Момент инерции относительно центра шара удобно вычислить в сферических координатах:

$$\begin{aligned} I_0 &= \gamma \iiint_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \gamma \iiint_{(V')} \rho^4 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \\ &= \gamma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^R \rho^4 d\rho = \gamma \cdot 2\pi \cdot 2 \frac{R^5}{5} = \frac{4\pi}{5} R^5 \cdot \frac{3P}{4g\pi R^3} = \frac{3}{5} \frac{P}{g} R^2. \end{aligned}$$

Так как вследствие однородности и симметрии шара его моменты инерции относительно любого диаметра равны, вычислим момент инерции относительно диаметра, лежащего, например, на оси Oz :

$$\begin{aligned}
I_z &= \gamma \iiint_{(V)} (x^2 + y^2) dx dy dz = \gamma \iiint_{(V')} \rho^2 \sin^2 \theta \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \\
&= \gamma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^R \rho^4 d\rho = \gamma \cdot 2\pi \frac{R^5}{5} \int_0^\pi (\cos^2 \theta - 1) d(\cos \theta) = \\
&= \gamma \cdot 2\pi \frac{R^5}{5} \left(\frac{1}{3} \cos^3 \theta - \cos \theta \right) \Big|_0^\pi = 2\pi \gamma \frac{R^5}{5} \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \pi \frac{R^5}{5} \frac{3P}{4g\pi R^3} = \frac{2P}{5g} R^2.
\end{aligned}$$

Задания.

1. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертеж.

$$1) (V): x^2 + y^2 = 1, z = 2 - x - y, z \geq 0 \quad \left(\text{Ответ: } 2\pi. \right)$$

$$2) (V): z \geq 0, z = 4 - x, x = 2\sqrt{y}, y = 2\sqrt{x} \quad \left(\text{Ответ: } \frac{176}{15}. \right)$$

2. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область (V) , ограниченную указанными поверхностями:

$$1) (V): z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, z = 8 \quad \left(\text{Ответ: } (0,0,6). \right)$$

$$2) (V): z = 5(x^2 + y^2), x^2 + y^2 = 2, z = 0 \quad \left(\text{Ответ: } \left(0,0,\frac{10}{3}\right). \right)$$

3. Вычислить момент инерции относительно указанной оси координат однородного тела, занимающего область (V) ограниченную данными поверхностями. Плотность тела γ принять равной 1.

$$1) (V): x = y^2 + z^2, x = 2, Ox \quad \left(\text{Ответ: } \frac{4\pi}{3}. \right)$$

$$2) (V): y^2 = x^2 + z^2, y = 2, Oy \quad \left(\text{Ответ: } \frac{16\pi}{5}. \right)$$

Домашнее задание.

1. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертеж.

$$1) (V): x^2 + y^2 = 4, z = 4 - x - y, z \geq 0 \quad \left(\text{Ответ: } 16\pi. \right)$$

$$2) (V): x \geq 0, z \geq 0, z = y, x = 4, y = \sqrt{25 - x^2} \quad \left(\text{Ответ: } \frac{118}{3}. \right)$$

2. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область (V) , ограниченную указанными поверхностями.

1) $(V): x = 6\sqrt{y^2 + z^2}, y^2 + z^2 = 9, x = 0$ $\left(\text{Ответ: } \left(\frac{27}{4}, 0, 0 \right) \right)$

2) $(V): z = 8(x^2 + y^2), z = 32$ $\left(\text{Ответ: } \left(0, 0, \frac{64}{3} \right) \right)$

3. Вычислить момент инерции относительно указанной оси координат однородного тела, занимающего область (V) , ограниченную данными поверхностями. Плотность тела γ принять равной 1.

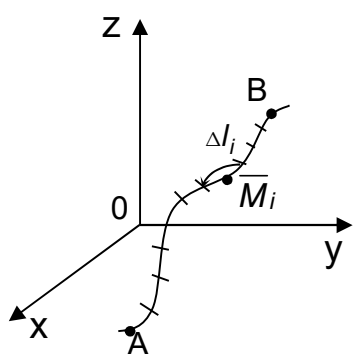
1) $(V): x = y^2 + z^2, x = 9, Ox$ $\left(\text{Ответ: } \frac{243\pi}{2} \right)$

2) $(V): x^2 = y^2 + z^2, x = 2, Ox$ $\left(\text{Ответ: } \frac{16\pi}{5} \right)$

Криволинейный интеграл I рода. Вычисление

Рассмотрим пространственную кусочно-гладкую кривую L , ограниченную точками A и B , и определенную на ней непрерывную функцию $f(x, y, z) \equiv f(M)$, где $M(x, y, z)$ – точка кривой. Дугу AB разобьем точками

M_1, M_2, \dots, M_{n-1} на n элементарных дуг $M_{i-1}M_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n, M_0 \equiv A, M_n \equiv B$), длины которых обозначим соответственно через $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$. На каждой из элементарных дуг $M_{i-1}M_i$ выберем произвольно точку $\bar{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ и составим сумму



$$I_n = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \Delta l_i, \quad (1)$$

называемую **интегральной суммой кривой L функции $f(x, y, z)$** .

Криволинейным интегралом первого рода от функции $f(x, y, z)$ по кривой L называется предел интегральной суммы (1) при $n \rightarrow \infty$ и $\max \Delta l_i \rightarrow 0$:

$$\int_L f(x, y, z) dl = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \Delta l_i \quad (2)$$

На кривой L , целиком лежащей в плоскости Oxy , функции f от координаты z не зависит, поэтому по определению

$$\int_L f(x, y) dl = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta l_i \quad (3)$$

Если подынтегральную функцию $f > 0$ рассматривать как линейную плотность кривой L , то криволинейный интеграл первого рода представляет собой массу кривой L .

Вычисление криволинейного интеграла первого рода (КРИ-I) сводится к вычислению определенного интеграла.

Если пространственная кривая L задана параметрами уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ ($t_1 \leq t \leq t_2$), то

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{t_1}^{t_2} f^2[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt \quad (4)$$

так как в этом случае дифференциал дуги $dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$.

Если кривая L лежит в плоскости xOy , то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t)] \sqrt{x'^2 + y'^2} dt \quad (5)$$

В частности, для плоской кривой, заданной уравнением $y = y(x)$, где $a \leq x \leq b$, имеем $dl = \sqrt{1 + y'^2} dx$, поэтому

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f[x, y(x)] \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (6)$$

Если плоская кривая задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ ($\alpha \leq \varphi \leq \beta$) в полярных координатах, то $dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi$.

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi \quad (7)$$

Основные свойства криволинейного интеграла первого рода

1. По самому определению КРИ – I не зависит от направления пути интегрирования:

$$\int_{AB} f(M) dl = \int_{BA} f(M) dl;$$

$$2. \int_L [f_1(M) \pm f_2(M)] dl = \int_L f_1(M) dl \pm \int_L f_2(M) dl;$$

$$3. \int_L c \cdot f(M) dl = c \int_L f(M) dl \quad (c = \text{const});$$

4. Если путь интегрирования L разбит на части L_1, L_2, \dots, L_n , то

$$\int_L f(M) dl = \int_{L_1} f(M) dl + \int_{L_2} f(M) dl + \dots + \int_{L_n} f(M) dl.$$

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L xy^2 dl$, где L – отрезок

прямой между точками $A(0;0)$, $B(4;3)$.

Решение.

Прямолинейный отрезок AB лежит в плоскости Oxy , на нем задана функция $f(x,y) = xy^2$. Уравнение прямой AB имеет вид $y = \frac{3}{4}x$.

Так как $y' = \frac{3}{4}$, то $dl = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} dx = \frac{5}{4} dx$.

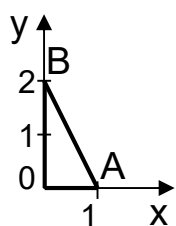
По формулам (6) получаем

$$\int_L xy^2 dl = \int_0^4 x \left(\frac{3}{4}x\right)^2 \cdot \frac{5}{4} dx = \int_0^4 \frac{45}{64} x^3 dx = \frac{45}{64} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^4 = \frac{45}{64} \cdot \frac{4^4}{4} = 45.$$

Пример 2. Вычислить $\int_L (2x + y) dl$, где L – контур треугольника ABO с

вершинами $A(1,0)$, $B(0,2)$, $O(0,0)$.

Решение.



В соответствии с четвертым свойством криволинейного интеграла первого типа

$$\int_L (2x + y) dl = \int_{AB} (2x + y) dl + \int_{BO} (2x + y) dl + \int_{OA} (2x + y) dl.$$

На отрезке AB $y = -2x + 2$, поэтому $y' = -2$,

$$dl = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{5} dx.$$

На отрезке BO $x = 0$, $x' = 0$, $dl = \sqrt{1 + x'^2} dy = dy$, на отрезке OA $y = 0$, $y' = 0$, $dl = \sqrt{1 + y'^2} dx = dx$.

Принимая во внимание первое свойство криволинейного интеграла и используя формулы (6) и (8), получаем

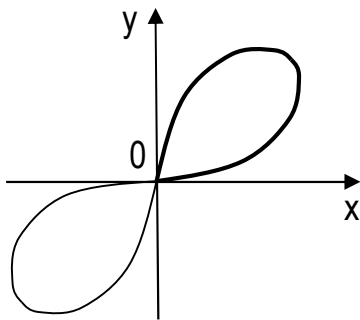
$$\int_L (2x + y) dl = \int_0^1 2\sqrt{5} dx + \int_0^2 y dy + \int_0^1 2x dx = 2\sqrt{5}x \Big|_0^1 + \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 + x^2 \Big|_0^1 = 3 + 2\sqrt{5}.$$

Пример 3. Вычислить $\int_L (x + y) dl$, где L – лепесток лемнискаты

$\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$, расположенный в первом координатном углу.

Решение.

Линия L задана уравнением в полярных координатах, поэтому здесь целесообразно воспользоваться формулой (7)



$$\rho' = a \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin 2\varphi}} \cdot \cos 2\varphi = \frac{a \cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}},$$

$$dl = \sqrt{a^2 \sin 2\varphi + \frac{a^2 \cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}} d\varphi = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\varphi}} d\varphi =$$

$$= \frac{a^2 d\varphi}{a\sqrt{\sin 2\varphi}} = \frac{a^2 d\varphi}{\rho}.$$

Заметив, что $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, т.е. $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, по формуле (7) получим

$$\int_L (x + y) dl = \int_0^{\pi/2} (\rho \cos \varphi + \rho \sin \varphi) \frac{a^2 d\varphi}{\rho} = a^2 \int_0^{\pi/2} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi =$$

$$= a^2 (\sin \varphi - \cos \varphi) \Big|_0^{\pi/2} = a^2 (1 - 0 - (0 - 1)) = 2a^2.$$

Пример 4. Вычислить $\int_L (2x + 4y - 4z + 7) dl$, где L – отрезок прямой между точками $M_1(8,9,3)$, $M_2(6,10,5)$.

Решение.

Составим уравнения прямой, проходящей через точки M_1 и M_2 :

$$\frac{x-8}{6-8} = \frac{y-9}{10-9} = \frac{z-3}{5-3} \text{ или } \frac{x-8}{-2} = \frac{y-9}{1} = \frac{z-3}{2} (=t).$$

Таким образом, получены параметрические уравнения прямой: $x = 8 - 2t$, $y = 9 + t$, $z = 3 + 2t$, точка M пробегает отрезок M_1M_2 , когда t изменяется от 0 до 1, т.е. $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.

Так как $x' = -2$, $y' = 1$, $z' = 2$, то $dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = \sqrt{4 + 1 + 4} dt = 3dt$.

По формуле (4)

$$\int_L (2x + 4y - 4z + 7) dl = \int_0^1 [2(8 - 2t) + 4(9 + t) - 4(3 + 2t) + 7] 3dt =$$

$$= 3 \int_0^1 (47 - 8t) dt = 3(47t - 4t^2) \Big|_0^1 = 3(47 - 4) = 129.$$

Задания.

1. Вычислить $\int_L \frac{dl}{x-y}$, если L – отрезок прямой $y = \frac{1}{2}x - 2$, заключенный между точками $A(0, -2)$ и $B(4; 0)$.

$$\left(\text{Ответ: } \sqrt{5} \ln 2. \right)$$

2. Вычислить $\oint_L xy dl$, если L – контур прямоугольника с вершинами в точках $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $C(4; 2)$, $D(0, 2)$. $\left(\text{Ответ: } 24. \right)$

3. Вычислить $\oint_L (x^2 + y^2) dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 = 4$. $B(4; 0)$. $\left(\text{Ответ: } 16\pi. \right)$

4. Вычислить $\int_L \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dl$, где L – дуга кардиоиды $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. $\left(\text{Ответ: } \frac{16}{3}. \right)$

5. Вычислить $\int_{L_{AB}} y dl$, L_{AB} – дуга астроида $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, заключенная между точками $A(1; 0)$ и $B(0; 1)$. $B(4; 0)$. $\left(\text{Ответ: } 0,6. \right)$

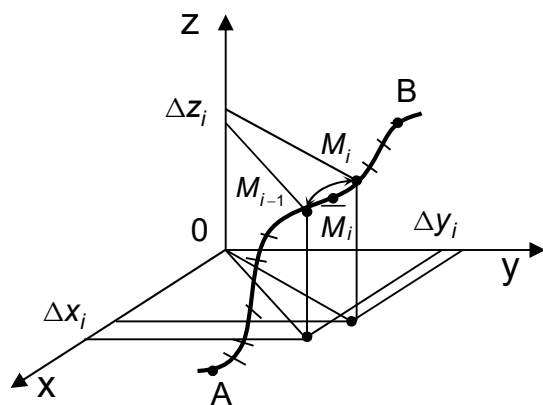
6. Вычислить $\int_L \frac{z^2 dl}{x^2 + y^2}$, где L – первый виток винтовой линии $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $z = 2t$. $B(4; 0)$. $\left(\text{Ответ: } \frac{16}{3} \sqrt{2} \pi^3. \right)$

Домашнее задание.

1. Вычислить $\int_L \sqrt{2 - z^2} (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) dl$, L – дуга кривой $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. $B(4; 0)$. $\left(\text{Ответ: } 4\pi^2 (1 + \pi^2). \right)$

2. Вычислить $\int_{L_{OB}} \frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$, где L_{OB} – отрезок прямой, соединяющий точки $O(0,0)$ и $B(2,2)$. $\left(\text{Ответ: } \frac{\pi}{2}. \right)$
3. Вычислить $\int_L \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dl$, где L – дуга кардиоиды $\rho = (1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. $\left(\text{Ответ: } (\pi + 2)\sqrt{2} - 8. \right)$
4. Вычислить $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 = 2y$. $\left(\text{Ответ: } 8. \right)$
5. Вычислить $\int_{L_{AB}} (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y}) dl$, где L_{AB} – дуга астроида $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ между точками $A(1,0)$ и $B(0,1)$. $\left(\text{Ответ: } 1. \right)$

Криволинейный интеграл II рода. Вычисление



Пусть дана дуга пространственной кусочно – гладкой кривой L , ограниченная точками A и B (см. рис.), и определенные на ней непрерывные функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$.

Дугу AB разобьем точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, ..., $M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ на n элементарных дуг $M_{i-1}M_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$, $M_0 \equiv A$, $M_n \equiv B$).

На каждой дуге $M_{i-1}M_i$ выберем произвольно точку $\bar{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ и значения функций в этой точке $P(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \equiv P(\bar{M}_i)$, $Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \equiv Q(\bar{M}_i)$, $R(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \equiv R(\bar{M}_i)$ умножим не на длину дуги $M_{i-1}M_i$ (как это было в случае криволинейного интеграла первого рода), а на проекции этой дуги соответственно на оси Ox , Oy , Oz , которые обозначим через Δx_i , Δy_i , Δz_i , причем $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$.

Из полученных произведений составим сумму

$$I_n = \sum_{i=1}^n \left[P(\bar{M}_i) \Delta x_i + Q(\bar{M}_i) \Delta y_i + R(\bar{M}_i) \Delta z_i \right], \quad (1)$$

называемую **интегральной суммой по координатам для функций** $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$.

Криволинейным интегралом второго рода (КРИ – II), взятым по кривой L или по пути АВ, называется предел интегральной суммы (1) при $n \rightarrow \infty$, $\max(\Delta x_i) \rightarrow 0$, $\max|\Delta y_i| \rightarrow 0$, $\max|\Delta z_i| \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \\ &= \lim_{\substack{\max|\Delta x_i| \rightarrow 0 \\ \max|\Delta y_i| \rightarrow 0 \\ \max|\Delta z_i| \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \left[P(\bar{M}_i) \Delta x_i + Q(\bar{M}_i) \Delta y_i + R(\bar{M}_i) \Delta z_i \right] \end{aligned} \quad (2)$$

На кривой L, целиком лежащей в плоскости Оху, функции P, Q, R, не зависят от z, $\Delta z_i = 0$, $dz = 0$, поэтому

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i| \rightarrow 0 \\ \max|\Delta y_i| \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \left[P(\bar{M}_i) \Delta x_i + Q(\bar{M}_i) \Delta y_i \right] \quad (3)$$

Если функции P, Q, R рассматривать как проекции некоторой переменной силы \vec{F} на координатные оси, то криволинейный интеграл второго рода выражает работу силы $\vec{F} = (P, Q, R)$, точка приложения которой описывает кривую L.

КРИ – II зависит от выбора направления обхода кривой: если изменить направление обхода, то интеграл меняет знак:

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz = - \int_{BA} P dx + Q dy + R dz \quad (4)$$

Вычисление КРИ – II также к вычислению определенного интеграла.

Если линия L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ ($t_1 \leq t \leq t_2$) и значению t_1 соответствует точка А, а значению t_2 – точка В, то

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz &= \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ P[x(t), y(t), z(t)] x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)] y'(t) + R[x(t), \right. \\ &\quad \left. y(t), z(t)] z'(t) \right\} dt \end{aligned} \quad (5)$$

В частности, для кривой L , лежащей в плоскости Oxy ,

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{t_1}^{t_2} \{P[x(t), y(t)] x'(t) + Q[x(t), y(t)] y'(t)\} dt \quad (6)$$

Если плоская кривая L задана уравнением $y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$), то

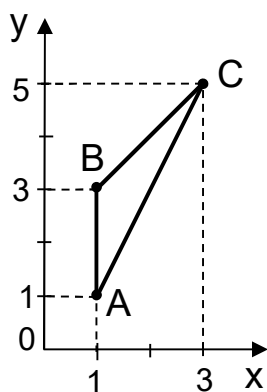
$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b \{P[x, y(x)] + Q[x, y(x)] y'(x)\} dx \quad (7)$$

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл второго типа $\int_L x^2 dx + xy^2 dy$, где L – отрезок прямой от точки $A(0,1)$ до точки $B(1,2)$.

Решение.

Уравнение прямой, проходящей через точки A и B , имеет вид $y = x + 1$, поэтому на отрезке AB $dy = dx$. Подставим в подынтегральную функцию вместо y его выражение через x ($y = x + 1$). При перемещении от A к B x меняется от 0 до 1. По формуле (7) получаем

$$\begin{aligned} \int_L x^2 dx + xy^2 dy &= \int_0^1 x^2 dx + x(x+1)^2 dx = \int_0^1 [x^2 + x(x^2 + 2x + 1)] dx = \\ &= \int_0^1 (x^2 + x^3 + 2x^2 + x) dx = \int_0^1 (x^3 + 3x^2 + x) dx = \left(\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$



Пример 2. Вычислить $\int_L (x^3 + y) dx + (x + y^3) dy$, где

L – ломаная ABC , причем $A(1;1)$, $B(3;1)$, $C(3;5)$.

Решение.

Сделаем чертеж

Так как контур интегрирования L состоит из отрезков AB и BC , то

$$\begin{aligned} \int_L (x^3 + y) dx + (x + y^3) dy &= \int_{AB} (x^3 + y) dx + (x + y^3) dy + \\ &+ \int_{BC} (x^3 + y) dx + (x + y^3) dy. \end{aligned}$$

На отрезке AB , уравнение которого $y = 1$, $dy = 0$; на отрезке BC , уравнение которого $x = 3$, $dx = 0$.

$$\int_L (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy = \int_1^3 (x^3 + 1)dx + (x + 1) \cdot 0 + \int_1^5 (3^3 + y) \cdot 0 + (3 + y^3)dy =$$

$$= \int_1^3 (x^3 + 1)dx + \int_1^5 (3 + y^3)dy = \left(\frac{x^4}{4} + x \right) \Big|_1^3 + \left(3y + \frac{y^4}{4} \right) \Big|_1^5 = 190.$$

Пример 3. Вычислить $\int_L y^2 dx + (x^2 + z)dy + (x + y + z^2)dz$, где L – отрезок прямой в пространстве от точки $A(1;0;2)$ до точки $B(3;1;4)$.

Решение.

Составим уравнение прямой, проходящей через точки A и B :

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-2}{4-2} (=t);$$

из параметрических уравнений прямой $x = 1 + 2t$, $y = t$, $z = 2 + 2t$ получаем: $dx = 2dt$, $dy = dt$, $dz = 2dt$.

Из этих же уравнений видно, что при перемещении от точки A к точке B параметр t меняется от 0 до 1. По формуле (5) находим

$$\int_L y^2 dx + (x^2 + z)dy + (x + y + z^2)dz = \int_0^1 t^2 2dt + \left[(1 + 2t)^2 + (2 + 2t) \right] dt +$$

$$+ \left[(1 + 2t) + t + (2 + 2t)^2 \right] 2dt = \int_0^1 \left[2t^2 + (1 + 4t + 4t^2 + 2 + 2t) + \right.$$

$$\left. + 2(1 + 3t + 4 + 8t + 4t^2) \right] dt = \int_0^1 (14t^2 + 28t + 13) dt = \left(\frac{14t^3}{3} + 14t^2 + 13t \right) \Big|_0^1 = \frac{95}{3}.$$

Пример 4. Вычислить $I = \oint_L 2x(y - 1)dx + x^2 dy$, где L – контур фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = 9$ при положительном направленными обхода.

Решение.

Если кривая интегрирования L замкнута, за положительное направление обхода по L принимается такое направление при котором ближайшая к наблюдателю часть области, ограниченной контуром, оказывается лежащей слева от наблюдателя.

В соответствии со свойствами криволинейных интегралов второго рода имеем $I = \int_{L_1} 2x(y - 1)dx + x^2 dy + \int_{L_2} 2x(y - 1)dx + x^2 dy$, где L_1 – дуга параболы $y = x^2$, L_2 – отрезок прямой $y = 9$.

Так как парабола и прямая пересекаются в точках $(-3;9)$ и $(3;9)$, то

$$I = \int_{-3}^3 (2x(x^2 - 1) + x^2 \cdot 2x) dx + \int_3^{-3} 2x(9 - 1) dx = \int_{-3}^3 (4x^3 - 2x) dx + 16 \int_3^{-3} x dx = 0.$$

Задания.

Вычислить данные криволинейные интегралы.

1. $\int_{L_{AB}} (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, где L_{AB} – дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(-1;1)$ до точки $B(1,1)$. $\left(\text{Ответ: } -6. \right)$
2. $\int_{L_{AB}} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}}$, где L_{AB} – дуга астроида $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ от точки $A(2,0)$ до точки $B(0,2)$. $\left(\text{Ответ: } \frac{3\sqrt[3]{2\pi}}{8}. \right)$
3. $\int_{L_{AB}} (x^2 - y^2) dx + xy dy$, где L_{AB} – отрезок прямой AB ; $A(1,1)$; $B(3,4)$. $\left(\text{Ответ: } 11\frac{5}{6}. \right)$
4. $\int_{L_{OB}} xy^2 dx + yz^2 dy - x^2 z dz$, где L_{OB} – отрезок прямой OB ; $O(0,0,0)$; $B(-2,4,5)$. $\left(\text{Ответ: } 91. \right)$
5. $\int_{L_{AB}} 2xy dx + y^2 dy + z^2 dz$, где L_{AB} – дуга одного витка L_{AB} винтовой линии $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2t$; $A(1,0,0)$, $B(1,0,4\pi)$. $\left(\text{Ответ: } 64\pi^3/3. \right)$
6. $\oint_L y dx - x dy$, где L – дуга эллипса $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, "пробегаемая" в положительном направлении обхода. $\left(\text{Ответ: } -12\pi. \right)$

Домашнее задание.

Вычислить данные криволинейные интегралы:

1. $\int_{L_{OA}} (x^2 + y^2)dx + 2xydy$, где L_{OA} – дуга кубической параболы $y = x^3$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$. $\left(\text{Ответ: } \frac{4}{3} \right)$
2. $\oint_L (x + 2y)dx + (x - y)dy$, L – окружность $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ при положительном направлении обхода. $\left(\text{Ответ: } -4\pi \right)$
3. $\int_{L_{AB}} xdx + ydy + (x - y + 1)dz$, где L_{AB} – отрезок прямой AB ; $A(1,1,1)$; $B(2,3,4)$. $\left(\text{Ответ: } 7 \right)$
4. $\int_{L_{AB}} xdy - ydx$, где L_{AB} – дуга астроида $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ от точки $A(2;0)$ до точки $B(0,2)$. $\left(\text{Ответ: } \frac{3\pi}{4} \right)$
5. $\oint_L xdy - ydx$, где L – контур треугольника с вершинами $A(-1;0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$ при положительном направлении обхода.
(Ответ: 2.)

Приложения криволинейных интегралов

Длина дуги AB плоской или пространственной линии вычисляется по формуле

$$l = \int_{AB} dl \quad (1)$$

В частности, если пространственная линия задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ ($t_1 \leq t \leq t_2$), то

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt \quad (2)$$

Площадь S фигуры, расположенной в плоскости xOy и ограниченной замкнутой линией L ,

$$S = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx \quad (3)$$

Масса m материальной дуги L определяется формулой

$$m = \int_L \gamma(x, y, z) dl, \quad (4)$$

где $\gamma(x, y, z)$ – линейная плотность вещества в точке $M(x, y, z)$ этой дуги.

Прямоугольные декартовы **координаты центра тяжести материальной дуги L** находятся по формулам:

$$x_0 = \frac{1}{m} \int_L x \gamma(x, y, z) dl, \quad y_0 = \frac{1}{m} \int_L y \gamma(x, y, z) dl, \quad z_0 = \frac{1}{m} \int_L z \gamma(x, y, z) dl, \quad (5)$$

где m определяется формулой (4).

Если $\vec{F} = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$ – переменная сила, совершающая **работу A вдоль пути L** , и функции X, Y, Z непрерывны, то

$$A = \int_L X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz \quad (6)$$

В случае, когда сила \vec{F} имеет потенциал, т.е. если существует функция $u(x, y, z)$ (потенциальная или силовая функция) такая, что $\frac{\partial u}{\partial x} = X$,

$\frac{\partial u}{\partial y} = Y$, $\frac{\partial u}{\partial z} = Z$, то работа, независимо от пути L ,

$$A = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} Xdx + Ydy + Zdz = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} du = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1), \quad (6')$$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ – начальная точка пути; $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – конечная.

Функцию $u(x, y, z)$ можно найти по формуле

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x X(x, y, z)dx + \int_{y_0}^y Y(x_0, y, z)dy + \int_{z_0}^z Z(x_0, y_0, z)dz,$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – некоторая фиксированная точка в области (V) , в которой функции X, Y, Z непрерывны вместе со своими частными производными и в которой содержится линиями L .

Замечание. Если линия L – плоская и лежит в плоскости Oxy , то формулы (1), (4) – (6') упрощаются (соответствующие функции не зависят от z).

Пример 1. Найти массу материальной дуги кривой $2y = x^2$ между точками $A(0,0)$, $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, если линейная плотность вещества в точке $M(x, y)$ пропорциональна абсциссе этой точки.

Решение.

Применим формулу (4), для чего сначала найдем выражение линейной плотности $\gamma(x, y)$ и дифференциала дуги dl . Из условия следует, что линейная плотность выражается формулой $\gamma(x, y) = kx$, где k – коэффициент пропорциональности.

Из уравнения линии $y = \frac{1}{2}x^2$ находим $y' = x$, поэтому

$$dl = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + x^2} dx.$$

Согласно формуле (4)

$$m = \int_L \gamma(x, y, z) dl = \int_0^1 kx \sqrt{1 + x^2} dx = \frac{k}{2} \int_0^1 (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} d(1 + x^2) =$$

$$= \frac{3k}{4} (1 + x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{k(2\sqrt{2} - 1)}{3}.$$

Пример 2. Найти работу, производимую силой $\vec{F} = 4x^6\vec{i} + xy\vec{j}$ вдоль дуги кривой $y = x^3$ от точки $O(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

Решение.

Проекции силы X и Y на координатные оси равны: $X(x, y) = 4x^6$, $Y(x, y) = xy$.

Чтобы найти работу, необходимо воспользоваться частным случаем формулы (6): $A = \int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy$.

$$A = \int_L 4x^6 dx + xy dy = \int_0^1 (4x^6 + x \cdot x^3 \cdot 3x^2) dx = \int_0^1 7x^6 dx = x^7 \Big|_0^1 = 1.$$

Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования

Если L – кусочно-гладкий контур, ограничивающий на плоскости Oxy область D , а $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – функции, непрерывные в замкнутой области D и имеющие в ней непрерывные частные производные, то справедлива **формула Грина**

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (7)$$

где обход контура выбирается так, чтобы область D оставалась слева.

Криволинейный интеграл

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \quad (8)$$

где контур L целиком лежит внутри некоторой односвязной области D , в которой функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными, не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (9)$$

В этом случае подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал некоторой функции

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y)$$

и

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1), \quad (10)$$

где $M_1(x_1, y_1)$ – начальная; $M_2(x_2, y_2)$ – конечная точки пути интегрирования.

В частности, криволинейный интеграл по замкнутому контуру в этом случае равен нулю:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad (11)$$

Криволинейный интеграл

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz, \quad (12)$$

где L – контур, целиком лежащий в односвязной области (V) , в которой функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными, не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда выполняются равенства:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}; \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad (13)$$

В этом случае подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал некоторой функции:

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = du(x,y,z),$$

$$\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} Pdx + Qdy + Rdz = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1) \quad (14)$$

В частности, криволинейный интеграл по замкнутому контуру в этом случае равен нулю:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру $\oint_L xdx + ydy$, где L – эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение.

Воспользуемся параметрическими уравнениями эллипса $x = acost$, $y = bsint$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

Так как $dx = -asintdt$, $dy = bcostdt$, то

$$\begin{aligned} \oint_L xdx + ydy &= \int_0^{2\pi} acost(-asintdt) + bsint(bcost)dt = a^2 \int_0^{2\pi} cost d(cost) + \\ &+ b^2 \int_0^{2\pi} sint d(sint) = \frac{a^2 \cos^2 t}{2} \int_0^{2\pi} + b^2 \frac{\sin^2 t}{2} \int_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Замечание. Условие (9) здесь выполнено (так как $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$), подынтегральное выражение – полный дифференциал функции $u(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$; $xdx + ydy = d\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$, поэтому по формуле (10)

$$\oint_L xdx + ydy = \frac{1}{2} \left[(x_0^2 + y_0^2) - (x_0^2 + y_0^2) \right] = 0,$$

где $M_0(x_0, y_0)$ – произвольная точка эллипса.

Пример 2. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dx + y \left[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \right] dy$, где L – контур прямоугольника с вершинами $A(3, 2)$, $B(6, 2)$, $C(6, 4)$, $D(3, 4)$.

Решение.

Преобразуем сначала этот интеграл по формуле Грина. Поскольку

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial \left\{ y \left[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \right] \right\}}{\partial x} = y \left(y + \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right) = y \left(\frac{y\sqrt{x^2 + y^2} + 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right),$$

по формуле (7) имеем:

$$\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dx + y \left[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \right] dy =$$

$$= \iint_{(D)} \left[y \left(\frac{y\sqrt{x^2 + y^2} + 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] dx dy = \iint_{(D)} y^2 dx dy,$$

где область (D) ограничена контуром L , т.е. прямоугольника ABCD.

Вычислим полученный двойной интеграл по прямоугольнику ABCD:

$$\iint_{(D)} y^2 dx dy = \int_3^6 dx \int_2^4 y^2 dy = \int_3^6 \frac{y^3}{3} \Big|_2^4 dx = \frac{56}{3} \int_3^6 dx = \frac{56}{3} x \Big|_3^6 = 56.$$

Пример 3. Вычислить $I = \oint_L y(1 - x^2) dx + (1 + y^2) x dy$, где контур L –

окружность $x^2 + y^2 = 4$, в положительном направлении обхода.

Решение.

Для вычисления интеграла воспользуемся формулой Грина:

$$I = \iint_D (1 + y^2 - 1 + x^2) dx dy = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy,$$

где D – круг, определенный неравенством $x^2 + y^2 \leq 4$. Имеем

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi, \quad dx dy = \rho d\rho d\varphi \\ y = \rho \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 2 \end{array} \right| = \iint_{D'} \rho^3 d\rho d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho = \int_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^2 d\varphi = 4 \cdot 2\pi = 8\pi.$$

Задания.

1. Вычислить дину дуги $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ ($1 \leq x \leq 4$).

$$\left(\text{Ответ: } \frac{1}{4}(15 + 2\ln 4). \right)$$

2. Вычислить массу дуги кривой $y = \ln x$ плотностью $\gamma = x^2$, если концы дуги определяются следующими значениями $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{8}$.

$$\left(\text{Ответ: } \frac{19}{3}. \right)$$

3. С помощью криволинейного интеграла второго рода вычислить площадь фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \text{ и осью } Oх. \quad \left(\text{Ответ: } 3\pi a^2. \right)$$

4. Вычислить работу силы $\vec{F} = (x^2 + y^2 + 1)\vec{i} + 2xy\vec{j}$ вдоль дуги параболы $y = x^3$, заключенной между точками $A(0,0)$ и $B(1,1)$.

$$\left(\text{Ответ: } \frac{196}{105}. \right)$$

5. Применив формулу Грина, вычислить $\oint_L y^2 dx + (x+y)^2 dy$, где L – контур треугольника ABC с вершинами в точках $A(3,0)$, $B(3,3)$ и

$$C(0,3). \quad \left(\text{Ответ: } 18. \right)$$

6. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{AB} (3x^2y - 4xy^2)dx + (x^3 - 4x^2y + 3y^2)dy, \text{ где } B(1,1), \text{ предварительно}$$

определив функцию $u(x,y)$, полным дифференциалом которой является подынтегральное выражение.

$$\left(\text{Ответ: } 2, u(x,y) = x^3y - 2x^2y^2 + y^3 + c. \right)$$

Домашнее задание.

1. Вычислить длину дуги линии $y = \ln \sin x$ $\left(\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$.

$$\left(\text{Ответ: } \ln \sqrt{3}. \right)$$

2. Вычислить массу дуги линии $y = x^4$, $0 \leq x \leq 1$, $\gamma(x,y) = kx^5$.

$$\left(\text{Ответ: } \frac{b}{144} (17\sqrt{17} - 1). \right)$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осями координат и дугой эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, расположенной в первом квадрате.

$$\left(\text{Ответ: } \frac{\pi ab}{4}. \right)$$

4. Вычислить площадь области D , ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{3}. \right)$

5. Вычислить работу силы $\vec{F} = x\vec{i} + \frac{1}{y^2}\vec{j}$ вдоль пути L , L – дуга кривой $xy = 1, (1 \leq x \leq 4)$ (в направлении возрастания параметра).

$$\left(\text{Ответ: } \frac{9}{2}. \right)$$

6. Применив формулу Грина, вычислить интеграл $\oint_{L_{ABC}} y^2 dx + (x+y)^2 dy$ по контуру треугольника ABC с вершинами

$$A(2,0), B(2,2) \text{ и } C(0,2). \quad \left(\text{Ответ: } \frac{16}{3}. \right)$$

7. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{AB} (3y^2 + 4y)dx + (6xy + 4x - 4y)dy, \text{ где } A(0,1), B(1,2) \text{ предвари-}$$

тельно определив функцию $u(x,y)$, полным дифференциалом которой является подынтегральное выражение.

$$\left(\text{Ответ: } 14, u(x,y) = 3x^2y + 4xy - 2y^2 + c. \right)$$

Литература

1. Бугров, Я.С. Сборник задач по высшей математике / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Высш. шк., 1983.
2. Гусак, А.А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак. – Мн.: Навука и тэхніка, 1991.
3. Руководство к решению задач по высшей математике: в 2-х частях / Под ред. Е. И. Гурского. – Мн.: Выш. шк., 1990. – Часть 2.
4. Тузик, А. И. Высшая математика. Интегрирование функций одной и нескольких переменных. – Брест, 2000.
5. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2-х частях / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высш. шк., 1986. – Часть 2.
6. Демидовича, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1990.
7. Запорожец, Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высш. шк., 1966.
8. Кудрявцев, В.А. Краткий курс высшей математики / В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986.
9. Жевняк, Р.М. Высшая математика: Функции многих переменных. Интегральное исчисление функций одной и многих переменных. Векторный анализ / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук. – Мн.: Выш. шк., 1993.
10. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: в 3-х частях / Под ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Выш. шк., 1991. – Часть 3.
11. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа: в 2-х частях. – М.: Высш. шк., 1981. – Часть 2.

Учебное издание

Составители:

*Гоголинская Рената Альдефонсовна
Джура Валентина Тимофеевна
Кузьмина Елена Викторовна
Лизунова Ирина Владимировна
Мороз Людмила Трофимовна*

ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

ЧАСТЬ V

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Ответственный за выпуск: Мороз Л.Т.

Редактор: Боровикова Е.А.

Компьютерная верстка: Горун Л.Н.

Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 10.08.2012 г. Бумага «Снегурочка». Формат 60х84 ¹/₁₆.

Гарнитура Arial. Усл. п. л. 3,49. Уч. изд. л. 3,75. Заказ №967.

Тираж 75 экз. Отпечатано на ризографе Учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».

224017, Брест, ул. Московская, 267.